

N° d'ordre : 790

**THÈSE D'UNIVERSITÉ**

Présentée devant

**L'UNIVERSITÉ DE RENNES I**  
**U.F.R de Mathématiques**

pour obtenir

**le titre de Docteur de l'Université de Rennes I**  
Mention : Mathématiques et Applications

par

**Mlle Marie-Pierre LEBAUD**

Sujets de la thèse :

Description de la formation d'un choc dans le p-système.  
Approximation de valeurs propres par  
des éléments finis isoparamétriques.

Soutenue le 17/06/92 devant la Commission d'Examen :

MM. NÉDÉLEC Jean-Claude  
CROUZEIX Michel  
GÉRARD Patrick  
LERNER Nicolas  
MÉTIVIER Guy

Président de jury

Examineurs

## SOMMAIRE

Introduction . . . . .	1
------------------------	---

### CHAPITRE I

#### Etude d'un choc dans une équation scalaire non linéaire

1. Quelques rappels . . . . .	5
1.1 Notations . . . . .	5
1.2 Méthode des caractéristiques . . . . .	5
1.3 Existence d'une solution régulière . . . . .	6
2. Position du problème . . . . .	7
2.1 Hypothèses sur $g$ . . . . .	7
2.2 Description formelle de la solution . . . . .	8
3. Equation de Rankine-Hugoniot . . . . .	12
3.1 Estimations . . . . .	12
3.2 Equation de Rankine-Hugoniot . . . . .	14
4. Régularité de la solution . . . . .	17
4.1 Régularité de la courbe de choc . . . . .	17
4.2 Régularité de la solution $u$ . . . . .	23

### CHAPITRE II

#### Formation d'un choc dans le p-système

1. Position du problème . . . . .	27
1.1 Le p-système . . . . .	27
1.2 Les invariants de Riemann . . . . .	27
1.3 Les équations de Rankine-Hugoniot . . . . .	29
1.3.1 Les équations . . . . .	29
1.3.2 Etude formelle de $(RH_1)$ . . . . .	29
1.3.3 Etude formelle de $(RH_2)$ . . . . .	30
1.4 Le théorème . . . . .	32
1.4.1 Les hypothèses . . . . .	32
1.4.2 Le théorème . . . . .	32
2. Construction du schéma itératif . . . . .	33
2.1 Linéarisation du système . . . . .	33
2.2 Choix des premiers termes . . . . .	35
2.2.1 Choix de $z_0$ . . . . .	35
2.2.2 Etude des caractéristiques . . . . .	36
2.2.3 Calcul d'une certaine intégrale . . . . .	38
2.2.4 Estimation de $\partial_y(H'(z^0))$ . . . . .	41
2.3 Hypothèses de récurrence . . . . .	43
2.3.1 Choix de $z^\nu$ . . . . .	43
2.3.2 Choix de $w^\nu$ . . . . .	43
2.4 Estimation de $\sigma^\nu - \sigma^0$ . . . . .	44

SOMMAIRE

3. Calcul de $z^{\nu+1}$ . . . . .	45
3.1 Résolution sur $\Omega_{t_0} \cup \bar{\Omega}_-$ . . . . .	46
3.2 Résolution sur $\bar{\Omega}_+$ . . . . .	46
3.2.1 Etude des caractéristiques . . . . .	46
3.2.2 Estimation de $\xi^{\nu+1} - \xi^0$ . . . . .	46
3.2.3 Estimation de $z^{\nu+1} - z^0$ . . . . .	51
4. Calcul de $w^{\nu+1}$ . . . . .	53
4.1 Résolution sur $\Omega_{t_0} \cup \bar{\Omega}_-$ . . . . .	53
4.2 Résolution sur $\bar{\Omega}_+$ . . . . .	53
4.2.1 Etude des caractéristiques . . . . .	53
4.2.2 Estimation de $w^{\nu+1}$ . . . . .	55
5. Estimation uniforme des dérivées partielles . . . . .	55
5.1 Estimation des dérivées partielles de $z^{\nu+1}$ . . . . .	56
5.1.1 Estimation de $\partial_y(z^\nu - z^0)$ . . . . .	56
5.1.2 Estimation de $\partial_t(z^\nu - z^0)$ . . . . .	59
5.2 Estimation des dérivées partielles de $w^{\nu+1}$ . . . . .	60
5.3 Preuve de la proposition 5.1.1 . . . . .	61
5.4 Preuve des premiers lemmes . . . . .	61
5.4.1 Preuve du lemme 5.1.1 . . . . .	61
5.4.2 Preuve du lemme 5.1.2 . . . . .	63
5.4.3 Preuve du lemme 5.1.3 . . . . .	65
6. Convergence des suites $(z^\nu)$ et $(w^\nu)$ . . . . .	66
6.1 Estimation de $\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1}$ . . . . .	66
6.2 Estimation de $z^{\nu+1} - z^\nu$ . . . . .	66
6.3 Estimation de $w^{\nu+1} - w^\nu$ . . . . .	68
6.4 Convergence du schéma . . . . .	69

ANNEXE

Equations différentielles de type Fuchs . . . . .	71
Bibliographie . . . . .	74

CHAPITRE III

Approximation des valeurs propres d'un opérateur elliptique

1. Le problème exact . . . . .	75
2. Le problème approché . . . . .	77
3. Hypothèses sur les triangles courbes . . . . .	78
4. Résultats connus . . . . .	82
5. Le théorème . . . . .	84
6. Preuve de la proposition 1 . . . . .	86
7. Preuve de la proposition 2 . . . . .	92
7.1 Rappels . . . . .	92
7.2 Preuve de la proposition 2 . . . . .	92
8. Exemples . . . . .	96
8.1 $k=2$ . . . . .	97
8.1.1 Préliminaires . . . . .	97
8.1.2 Calcul de $C''$ . . . . .	99
8.2 $k=3$ . . . . .	100
Bibliographie . . . . .	101

## INTRODUCTION

Cette thèse comporte deux parties distinctes. Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'étude de la formation d'un choc dans la solution d'une ou deux lois de conservation ; le troisième s'intéresse à l'approximation des valeurs propres d'un opérateur elliptique par la méthode des éléments finis isoparamétriques.

Les lois de conservation que l'on considère dans ce travail sont de la forme suivante :

$$(1) \quad \partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

où  $u = u(t, x)$  est une fonction de  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction supposée assez régulière. On va décrire une solution  $u$  de (1) vérifiant la condition initiale :

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

On sait que ce problème n'admet pas toujours de solution régulière globale même si la fonction  $u_0$  est supposée  $C^\infty$ . On cherche alors des solutions faibles de (1) et (2), i.e des solutions qui vérifient (1) au sens des distributions. Cette généralisation nous fait perdre l'unicité de la solution. On introduit alors des conditions d'entropie (voir Lax [11]) pour pouvoir choisir la "bonne" solution définie comme étant la limite en 0, si elle existe, de la suite  $u^\varepsilon$  solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

où  $\varepsilon \Delta u^\varepsilon$  représente un terme de viscosité. Très peu de résultats sont connus concernant l'unicité des solutions faibles entropiques dans le cas d'un système.

F. John [6] a montré que si le système (1) est vraiment non linéaire et si la fonction  $u_0$  vérifie certaines hypothèses, alors les dérivées premières de  $u$  explosent en un temps fini. On veut dans ce travail décrire précisément cette singularité lorsqu'elle est due à la formation d'un choc i.e à la rencontre de plusieurs caractéristiques en un même point. Pour obtenir une solution faible, la fonction  $u$  doit vérifier l'équation de Rankine-Hugoniot sur la courbe de choc  $x = \varphi(t)$  donnée par :

$$(3) \quad \sigma[u] = [f(u)] \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma(t) = \varphi'(t)$$

On s'intéresse à une loi de conservation scalaire dans le premier chapitre. On suppose que la condition initiale vérifie :

$$(4) \quad \text{Il existe } y_0 \text{ tel que : } \begin{cases} g^{(1)}(y_0) < 0 \\ g^{(2)}(y_0) = 0 \\ g^{(3)}(y_0) > 0 \end{cases}$$

où on a posé  $g = f' \circ u_0$ . La fonction  $g$  est supposée suffisamment régulière pour que les singularités de  $u$  ne proviennent pas de celles de  $g$ . En utilisant la méthode des caractéristiques, on construit une solution faible entropique et on donne des estimations de  $u$ , de ses dérivées partielles et de la courbe de choc. La singularité de la solution au voisinage de la naissance du choc est de l'ordre de  $(t^3 + x^2)^{\frac{1}{6}}$ . S. Kruzkov [7] a montré l'unicité de la solution faible entropique d'une loi de conservation scalaire avec condition initiale.

Le deuxième chapitre est consacré au p-système que l'on suppose strictement hyperbolique et à valeurs propres vraiment non linéaires. On travaille avec les invariants de Riemann qui permettent de diagonaliser le système. On a alors à étudier le système suivant :

$$(5) \quad \begin{cases} \begin{cases} \partial_t w + H'(z - w) \partial_x w = 0 \\ \partial_t z - H'(z - w) \partial_x z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} w(0, x) = w_0(x) \\ z(0, x) = z_0(x) \end{cases} \end{cases}$$

On suppose que  $w_0 = 0$  et que la fonction  $g = -H'(z_0)$  vérifie la condition (4). On remarque alors qu'une solution de (5) est ( $w^0 = 0, z^0$  solution d'une équation scalaire) mais cette solution ne vérifie pas les équations de Rankine-Hugoniot du p-système. C'est cependant une bonne approximation d'une solution faible de (5). On construit alors un schéma itératif à partir de (5), que l'on initialise avec les fonctions  $w^0$  et  $z^0$  définies précédemment. En résolvant les équations linéaires obtenues, on construit une suite  $(z^\nu, w^\nu)$ , qui nous donne, par passage à la limite, une solution du p-système présentant un choc et on donne également des estimations de cette solution, de ses dérivées partielles et de la courbe de choc.

La solution du p-système construite vérifie les conditions de Lax [8], i.e qu'on a un 1-choc admissible; or les valeurs propres sont vraiment non linéaires et le p-système admet une entropie strictement convexe (Lax [11]); il s'agit donc d'une solution faible entropique. On connaît peu de résultats sur l'unicité d'une telle solution; ils concernent essentiellement des solutions localement lipschitziennes par morceaux (DiPerna [3]; Liu [12]), ce qui n'est pas le cas ici. Cependant, la solution construite vérifie les conditions du théorème d'unicité d'Oleinik [15].

Dans la deuxième partie de cette thèse, on s'intéresse à l'approximation des valeurs propres d'un opérateur elliptique par la méthode des éléments

finis isoparamétriques. On cherche à montrer que l'estimation obtenue dans le cas d'éléments finis conformes par J. Osborn [6] reste vraie si l'on approche correctement, dans un sens que l'on précisera, la frontière de l'ouvert considéré.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Michel Crouzeix et Guy Métivier qui ont accepté de diriger cette thèse. Leurs précieux conseils et leurs remarques judicieuses m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier Jean-Claude Nédélec d'avoir bien voulu en présider le jury ainsi que Patrick Gérard et Nicolas Lerner de me faire l'honneur d'y participer.

Cette thèse a été dactylographiée avec l'éditeur de texte  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ . Je remercie vivement Gabriel Caloz, Yvon Lafranche et Daniel Martin qui m'ont beaucoup aidée dans mon apprentissage de  $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ .

Je voudrais également remercier les secrétaires de l'U.F.R de mathématiques de l'Université de Rennes I pour leur gentillesse et leur disponibilité.

## CHAPITRE I

### ETUDE D'UN CHOC DANS UNE EQUATION SCALAIRE NON LINEAIRE A UNE DIMENSION D'ESPACE

Nous nous intéressons à la résolution d'un problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles scalaire non linéaire à une dimension d'espace. La donnée initiale est choisie pour obtenir une solution entropique présentant un choc.

La construction de la solution est faite par la méthode des caractéristiques et nous donnons des estimations de la fonction au voisinage de la singularité ainsi que de la courbe de choc solution de l'équation de Rankine-Hugoniot.

#### 1. Quelques rappels.

##### 1.1 Notations.

On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy suivant :

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x f(u(t, x)) = 0 & \text{sur } \Omega = [0, +\infty[ \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $f$  et  $u_0$  sont des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  de classe respectivement  $C^{p+1}$  et  $C^p$ . On suppose également que  $u_0$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Pour simplifier l'écriture des résultats ultérieurs, on introduit la fonction  $g$  bornée et de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$(1.1.2) \quad g = f' \circ u_0.$$

##### 1.2 Méthode des caractéristiques.

On va d'abord rappeler le principe de la construction d'une solution d'une équation aux dérivées partielles par la méthode des caractéristiques.

Soit  $u$  une solution régulière de (1.1.1) et  $y$  fixé, on considère une caractéristique  $t \rightarrow x(t, y)$  issue de  $(0, y) \in \Omega$  solution de :

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t, y) = f'(u(t, x(t, y))) \\ x(0, y) = y \end{cases}$$

On a alors :

$$\frac{du}{dt}(t, x(t, y)) = \partial_t u(t, x(t, y)) + \partial_x f(u(t, x(t, y))) = 0$$

ce qui montre que  $u$  est constant le long d'une caractéristique. On a ainsi :

$$(1.2.2) \quad u(t, x(t, y)) = u_0(y).$$

De plus, la solution de (1.2.1) est la droite d'équation :

$$(1.2.3) \quad x = y + tg(y).$$

Réciproquement, supposons que l'équation (1.2.3) admette une unique solution  $y$  fonction régulière de  $(t, x)$ . On construit alors une solution régulière de (1.1.1) en posant :

$$(1.2.4) \quad u(t, x) = u_0(y(t, x)).$$

On va, dans le paragraphe suivant, préciser le domaine d'existence de la solution régulière ainsi construite.

### 1.3 Existence d'une solution régulière.

On pose :

$$(1.3.1) \quad \mathcal{G} = \left\{ -\frac{1}{g'(y)} ; y \in \mathbb{R} ; g'(y) < 0 \right\}$$

et on définit :

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} t_0 = \inf \mathcal{G} & \text{si } \mathcal{G} \neq \emptyset \\ t_0 = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

alors, pour tout  $t \in [0, t_0[$  et pour tout  $y$  réel, on a  $1 + tg'(y) > 0$ . L'application  $y \rightarrow y + tg(y)$ , pour  $t$  fixé, est strictement croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $(t, x) \in \Omega_{t_0} = [0, t_0[ \times \mathbb{R}$ , il existe un unique  $y$  réel tel que  $x = y + tg(y)$ . De plus, si on se place en un point  $(t, x, y)$  tel que  $h(t, x, y) = -x + y + tg(y) = 0$ , on a  $\partial_y h(t, x, y) = 1 + tg'(y) \neq 0$ , donc, d'après le théorème des fonctions implicites, la fonction  $(t, x) \rightarrow y(t, x)$  est de classe  $C^p$  sur  $\Omega_{t_0}$ .

On pose alors :

$$(1.3.3) \quad u(t, x) = u_0(y(t, x))$$

comme on l'a vu précédemment et on a ainsi montré l'existence d'une solution régulière sur  $\Omega_{t_0}$ .

Si  $\mathcal{G} = \emptyset$ , on a en fait résolu le problème sur  $\Omega$ . On va donc s'intéresser au cas où  $\mathcal{G} \neq \emptyset$  et préciser le problème traité.

## 2. Position du problème.

On veut étudier une solution présentant un choc ; celui-ci sera dû à la rencontre de plusieurs caractéristiques. On va préciser les hypothèses faites sur la fonction  $g$  qui vont entraîner la naissance de ce choc.

### 2.1 Hypothèses sur $g$ .

On doit distinguer deux cas :

- (1) La borne inférieure de  $\mathcal{G}$  n'est pas un minimum. Dans ce cas, les caractéristiques se croisent à l'infini dans la variable d'espace. On ne s'intéresse pas ici à ce genre de singularité.
- (2) La borne inférieure de  $\mathcal{G}$  est atteinte, il existe alors  $y_0$  tel que :

$$(2.1.2) \quad t_0 = -\frac{1}{g'(y_0)}.$$

$y_0$  est donc un minimum global de  $g'$ , d'où :

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} g^{(1)}(y_0) < 0 & \text{car } y_0 \in \mathcal{G} \\ g^{(2)}(y_0) = 0 \\ g^{(3)}(y_0) \geq 0 \end{cases}$$

On ne s'intéressera pas au cas où  $g^{(3)}(y_0) = 0$  qui correspond à une dégénérescence du choc, on se limitera à l'étude du cas générique où  $g^{(3)}(y_0) > 0$ .

On prend donc comme hypothèses sur la fonction  $g$  :

$$(2.1.4) \quad \begin{cases} g \in C^p(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \text{ avec } p \geq 4 \\ \text{Il existe } y_0 \text{ tel que } \begin{cases} g^{(1)}(y_0) < 0 \\ g^{(2)}(y_0) = 0 \\ g^{(3)}(y_0) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

On a vu au paragraphe précédent que le choc naissait au point  $(t_0, x_0) \in \Omega$  avec :

$$(2.1.5) \quad x_0 = y_0 + t_0 g(y_0).$$

La fonction  $g$  étant bornée sur  $\mathbb{R}$ , le problème est local : le comportement de  $u$  au voisinage de  $(t_0, x_0)$  ne dépend que des valeurs de  $u_0$  au voisinage de  $y_0$ . On peut donc supposer que :

$$(2.1.6) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{y_0\} \quad (y - y_0)g^{(2)}(y) > 0.$$

Il suffit de modifier  $u_0$  à l'extérieur d'un voisinage de  $y_0$  pour obtenir ce résultat. On peut faire ce changement sans modifier le fait que  $u_0 \in C^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et donc que  $g$  soit bornée.

## 2.2 Description formelle de la solution.

L'hypothèse (2.1.6) et le fait que  $g$  soit bornée entraîne que  $g'$  est strictement décroissante de 0 à  $-1/t_0$  (respectivement croissante de  $-1/t_0$  à 0) lorsque  $y$  varie de  $-\infty$  à  $y_0$  (resp. de  $y_0$  à  $+\infty$ ). On en déduit que, pour  $t > t_0$ , l'équation :

$$(2.2.1) \quad 1 + tg'(y) = 0$$

admet deux racines distinctes  $\eta_-(t)$  et  $\eta_+(t)$  avec  $\eta_-(t) < y_0 < \eta_+(t)$  où  $\eta_-$  et  $\eta_+$  sont des fonctions monotones de classe  $C^{p-1}$  sur  $[t_0, +\infty[$ . On pose :

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} x_-(t) = \eta_-(t) + tg(\eta_-(t)) \\ x_+(t) = \eta_+(t) + tg(\eta_+(t)) \end{cases}$$

On a alors le tableau de variations suivant pour la fonction  $y \rightarrow y + tg(y)$ .

$y$	$-\infty$	$\eta_-(t)$	$y_0$	$\eta_+(t)$	$+\infty$	
$1+tg'(y)$		+	0	-	0	+
$y+tg(y)$	$-\infty$	$\nearrow x_-(t)$	$\searrow x_0$	$\searrow x_+(t)$	$\nearrow +\infty$	

Il en résulte que l'équation  $x = y + tg(y)$  admet :

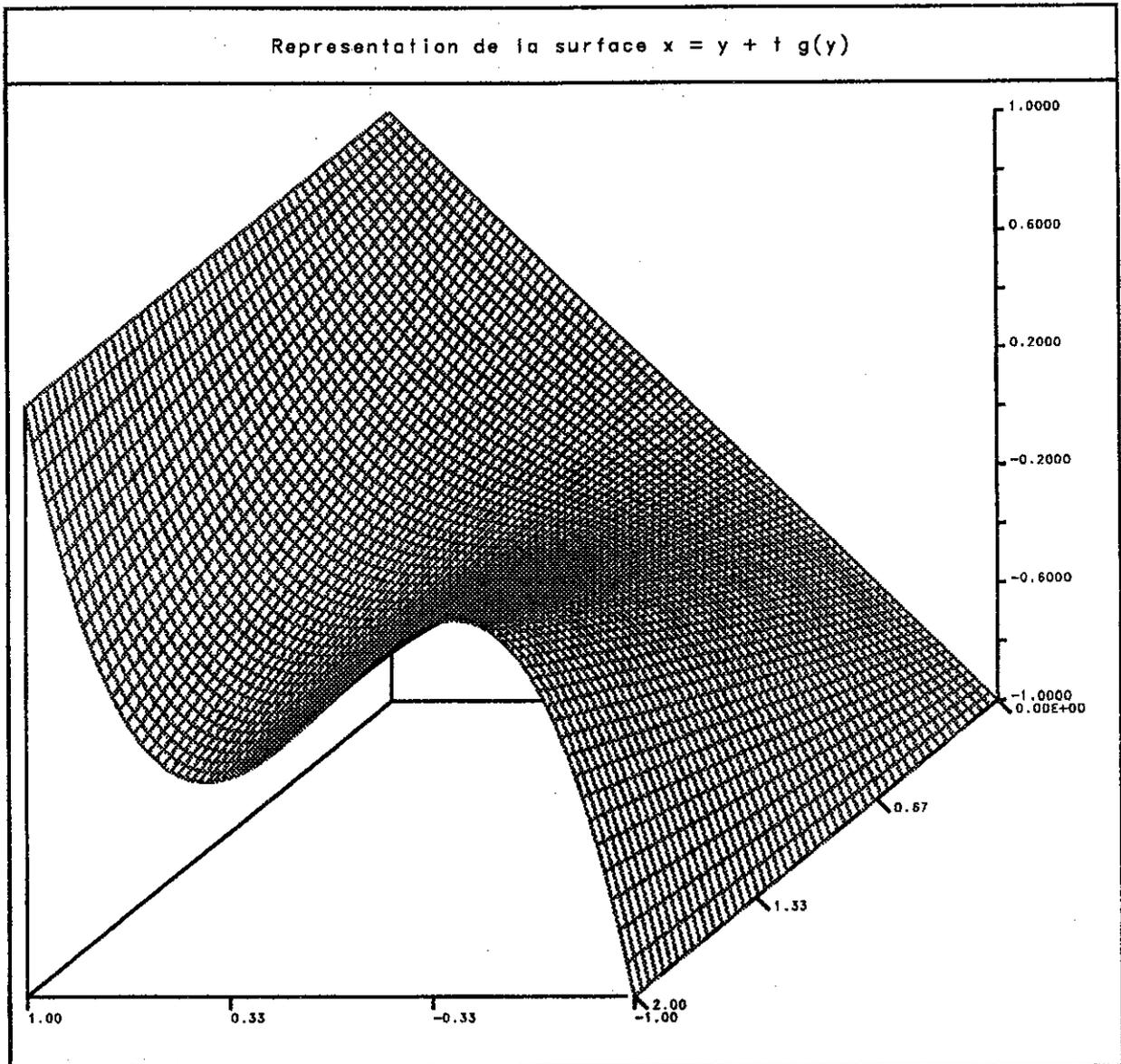
$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} &\text{pour } x \in ]-\infty, x_+(t)[, \text{ une seule solution notée } y_-(t, x) \\ &\text{pour } x \in ]x_+(t), x_-(t)[, \text{ trois solutions notées} \\ &\quad y_-(t, x) < y_c(t, x) < y_+(t, x) \\ &\text{pour } x \in ]x_-(t), +\infty[, \text{ une seule solution notée } y_+(t, x) \\ &\text{pour } x = x_+(t), \text{ une solution simple et une solution double} \\ &\quad y_-(t, x) < y_c(t, x) = y_+(t, x) = \eta_+(t) \\ &\text{pour } x = x_-(t), \text{ une solution simple et une solution double} \\ &\quad y_-(t, x) = y_c(t, x) = \eta_-(t) < y_+(t, x). \end{aligned}$$

La figure (2.2.1) représente l'intersection de la surface  $x = y + tg(y)$  avec les plans  $t = 0, t = t_0$  et  $t > t_0$ .

*Remarque.* Si on ne fait pas l'hypothèse (2.1.6), les résultats énoncés restent vrais sur un voisinage de  $(t_0, x_0)$ .

Pour  $0 \leq t \leq t_0$ , on note  $y_+(t, x) = y_-(t, x) = y(t, x)$  l'unique solution de  $x = y + tg(y)$ , définie en (1.3.3). On pose :

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \Omega_{t_0} \cup \{(t, x) \in \Omega ; t \geq t_0 ; x > x_+(t)\} \\ \Omega_- &= \Omega_{t_0} \cup \{(t, x) \in \Omega ; t \geq t_0 ; x < x_-(t)\} \end{aligned}$$



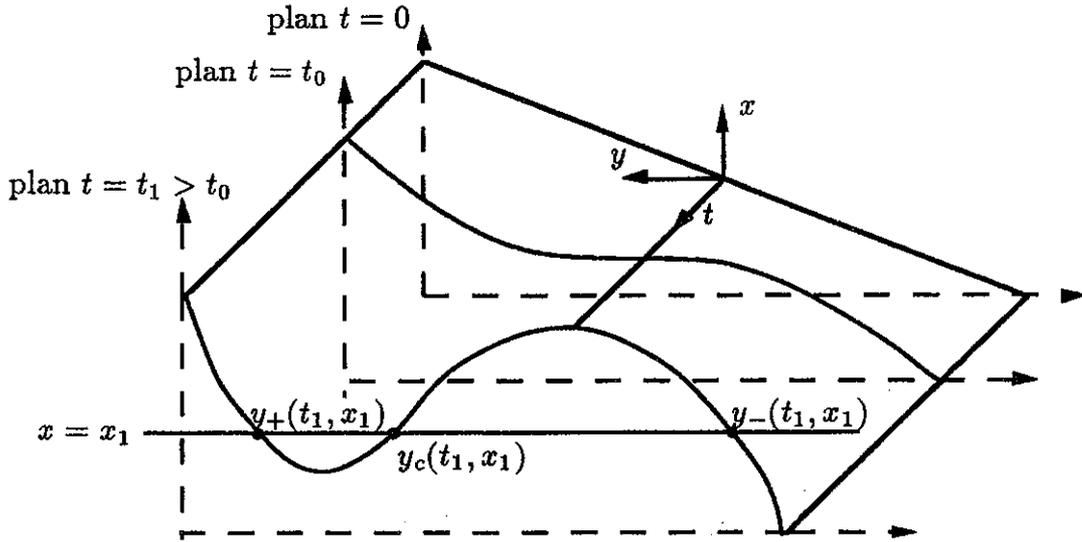


Figure 2.2.1

La fonction  $y_+$  (respectivement  $y_-$ ) est de classe  $C^p$  sur  $\Omega_+$  (resp.  $\Omega_-$ ). Elle est de plus continue sur  $\bar{\Omega}_+$  (resp.  $\bar{\Omega}_-$ ). La régularité s'établit par le théorème des fonctions implicites comme on l'a fait sur  $\Omega_{t_0}$  dans le paragraphe 1.3. La fonction  $u_+(t, x) = u_0(y_+(t, x))$  (resp.  $u_-(t, x) = u_0(y_-(t, x))$ ) est solution de (1.1.1) sur  $\Omega_+$  (resp.  $\Omega_-$ ).

Nous allons ensuite montrer qu'il existe une fonction  $\varphi$  appartenant à  $C^{\frac{p}{2}}([t_0, +\infty[) \cap C^p([t_0, +\infty[)$  vérifiant :

$$(2.2.4) \quad x_+(t) < \varphi(t) < x_-(t) \quad \text{pour } t > t_0$$

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} \varphi'(t) = \frac{f(u_+(t, \varphi(t))) - f(u_-(t, \varphi(t)))}{u_+(t, \varphi(t)) - u_-(t, \varphi(t))} \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On pose alors :

$$(2.2.6) \quad u(t, x) = \begin{cases} u_+(t, x) & \text{si } x > \varphi(t) \text{ ou } t \leq t_0 \\ u_-(t, x) & \text{si } x < \varphi(t) \end{cases}$$

La solution  $u$  ainsi construite est solution forte de (1.1.1) à droite et à gauche de la courbe  $x = \varphi(t)$ . Elle vérifie de plus la condition de Rankine-Hugoniot (2.2.5), c'est donc une solution faible de (1.1.1).

D'autre part, la condition (2.1.6) implique que :

$$(2.2.7) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad g'(y) = f''(u_0(y))u_0'(y) < 0.$$

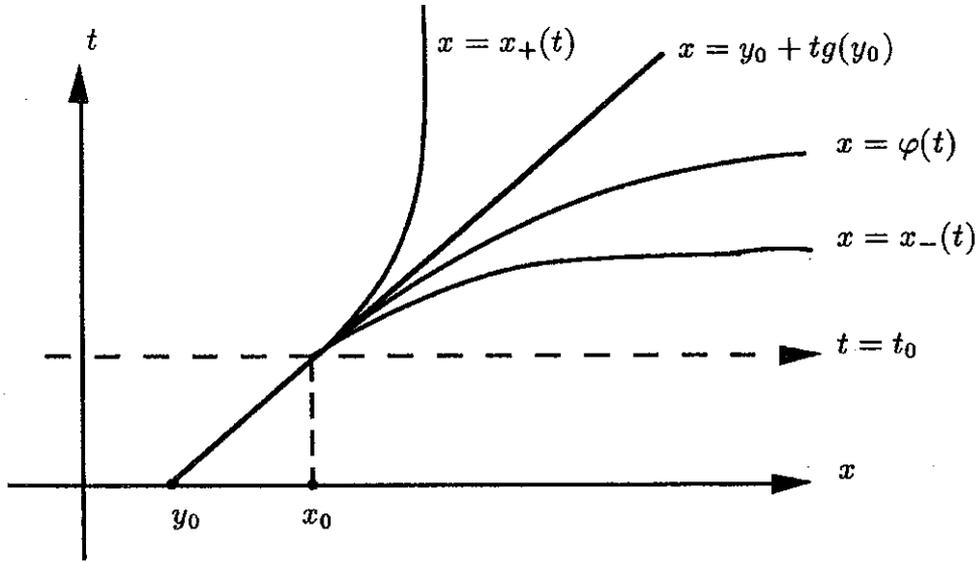


Figure 2.2.2

Or, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$u_+(t, x) - u_-(t, x) = u'_0(c)(y_+(t, x) - y_-(t, x)).$$

De (2.2.7), on en déduit que  $[u]$  est positif si  $f$  est concave et négatif si  $f$  est convexe. La solution faible ainsi construite est entropique. Elle est donc unique d'après le théorème de S.N Kruzkov [7].

*Remarque.* Il résulte de cette unicité que l'équation différentielle (2.2.5) admet au plus une solution.

Dans le paragraphe suivant, on met en œuvre cette méthode et on donne des estimations des fonctions  $y_-$ ,  $y_+$  et  $\varphi$ . Pour simplifier les calculs, on suppose dans toute la suite que :

$$(2.2.8) \quad \begin{cases} y_0 = g(y_0) = g^{(2)}(y_0) = 0 \\ g'(y_0) = -1 \quad \text{et} \quad g^{(3)}(y_0) = 6 \\ yg^{(2)}(y) > 0 \quad \forall y \neq 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne également :

$$(2.2.9) \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ t_0 = 1 \end{cases}$$

Il suffit de faire un changement affine des variables  $x$  et  $t$  pour obtenir ces hypothèses qui ne sont donc nullement restrictives.

### 3. Equation de Rankine-Hugoniot.

#### 3.1 Estimations.

On pose :

$$(3.1.1) \quad \tau = t - t_0.$$

et on va donner des estimations sur les fonctions  $\eta_-$ ,  $\eta_+$ ,  $x_-$  et  $x_+$  introduites dans le paragraphe précédent.

#### Lemme 3.1.1.

(1) Les fonctions  $\eta_+$  et  $\eta_-$  sont de classe  $C^{p-3}$  par rapport à la variable  $\sqrt{\tau}$ .

(2) Au voisinage de  $\tau = 0$ , on a :

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} \eta_+(t) \sim \sqrt{\frac{\tau}{3}} & \text{et } \eta_-(t) \sim -\sqrt{\frac{\tau}{3}} \\ x_+(t) \sim -\frac{2}{9}\sqrt{3}\tau^{\frac{3}{2}} & \text{et } x_-(t) \sim \frac{2}{9}\sqrt{3}\tau^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

(3)

$$(3.1.3) \quad y_-(t, \cdot) \text{ et } y_+(t, \cdot) \text{ sont des fonctions croissantes.}$$

*Preuve.*

Il suffit de le montrer pour  $\eta_+$  et  $x_+$ . On sait déjà que  $\eta_+$  est de classe  $C^{p-1}$  sur  $]t_0, +\infty[$ , on travaille donc au voisinage de  $\tau = 0$ . On remarque que  $g'(\eta) - g'(0) = 1 - \frac{1}{t}$ . On obtient donc en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\eta^2 \int_0^1 g^{(3)}(s\eta)(1-s) ds = 1 - \frac{1}{t}$$

car  $g^{(2)}(0) = 0$ . On pose

$$h(\eta, \tau) = \eta \left( \int_0^1 g^{(3)}(s\eta)(1-s) ds \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{\tau}{\tau+1}}.$$

On obtient que  $h(0, 0) = 0$  et  $\partial_\eta h(0, 0) = \sqrt{3}$ . Le théorème des fonctions implicites prouve la première partie. On obtient l'équivalent de  $\eta$  par identification.

On a posé :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= \eta_+(t) + tg(\eta_+(t)) \\ &= t(g(\eta_+(t)) - g'(\eta_+(t))\eta_+(t)) \end{aligned}$$

or un développement limité au voisinage de 0 donne :

$$\begin{aligned} g(\eta_+(t)) - g'(\eta_+(t))\eta_+(t) &= -\frac{1}{3}g^{(3)}(0)(\eta_+(t))^3 + O(\tau^2) \\ &= -2(\eta_+(t))^3 + O(\tau^2). \end{aligned}$$

L'équivalent obtenu pour  $\eta_+(t)$  permet alors de conclure.

Enfin  $y_-(t, \cdot)$  et  $y_+(t, \cdot)$  sont les fonctions réciproques de fonctions croissantes. Elles sont donc également croissantes.  $\square$

On introduit la notation suivante :

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} \tilde{y}_-(t, x) = \begin{cases} y_-(t, x_+(t)) & \text{si } x \leq x_+(t) \\ y_-(t, x) & \text{si } x_+(t) \leq x \leq x_-(t) \\ \eta_-(t) & \text{si } x \geq x_-(t) \end{cases} \\ \tilde{y}_+(t, x) = \begin{cases} y_+(t, x_-(t)) & \text{si } x \geq x_-(t) \\ y_+(t, x) & \text{si } x_+(t) \leq x \leq x_-(t) \\ \eta_+(t) & \text{si } x \leq x_+(t) \end{cases} \end{cases}$$

Dans l'étude de l'équation de Rankine-Hugoniot, on travaillera avec ces fonctions qui ont l'intérêt d'être continues sur  $\overline{\Omega_+ \cup \Omega_-}$  et on verra que la solution de cette équation se situe dans  $\Omega_+ \cap \Omega_-$  où l'on a  $\tilde{y}_\pm = y_\pm$ .

**Lemme 3.1.2.**

On a les estimations suivantes :

(1)

$$(3.1.5) \quad \begin{cases} \tilde{y}_-(t, x) = O(\sqrt{\tau}) \\ \tilde{y}_+(t, x) = O(\sqrt{\tau}) \end{cases}$$

(2) Il existe  $C > 0$  tel que :

$$x.(\tilde{y}_-(t, x) + \tilde{y}_+(t, x)) \geq -C\tau|x|.$$

*Preuve.*

D'après le lemme 3.1.1, il suffit de la faire sur  $\overline{\Omega_+ \cap \Omega_-}$ .

1)  $\tilde{y}_+$  est une fonction croissante de  $x$ , on a donc :

$$0 \leq \eta_+(t) \leq \tilde{y}_+(t, x) \leq y_+(t, x_-(t)).$$

Il suffit donc de montrer que si on pose  $z = y_+(t, x_-(t))$ , on a  $z = O(\sqrt{\tau})$ . Or  $z$  vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} z + tg(z) &= x_-(t) = \eta_-(t) + tg(\eta_-(t)) \\ 1 + tg'(\eta_-(t)) &= 0 \\ \text{d'où } g(z) - g(\eta_-(t)) &= (z - \eta_-(t))g'(\eta_-(t)). \end{aligned}$$

En écrivant la formule de Taylor avec reste intégrale de  $g$  en  $\eta_-(t)$ , on obtient alors :

$$g^{(2)}(\eta_-(t)) + (z - \eta_-(t)) \int_0^1 (1 - \theta)^2 g^{(3)}(\eta_-(t) + \theta(z - \eta_-(t))) d\theta = 0$$

or  $g^{(2)}(\eta_-(t)) = 6\eta_-(t) + O(\tau)$  d'après (3.1.2) et

$$\int_0^1 (1 - \theta)^2 g^{(3)}(\eta_-(t) + \theta(z - \eta_-(t))) d\theta \sim 2 \quad \text{en } t_0$$

donc  $z - \eta_-(t) \sim 3\eta_-(t)$  pour  $t$  voisin de  $t_0$ .

On utilise alors (3.1.2) pour obtenir le résultat.

2)  $\tilde{y}_+ + \tilde{y}_-$  étant croissant en  $x$ , il suffit de montrer que

$$\tilde{y}_+(t, 0) + \tilde{y}_-(t, 0) = O(\tau).$$

Posons  $\xi_+(t) = \tilde{y}_+(t, 0)$  et  $\xi_-(t) = \tilde{y}_-(t, 0)$ .  $\xi_+$  et  $\xi_-$  sont respectivement la racine strictement positive et strictement négative de :

$$\begin{aligned} 0 &= \xi + t g(\xi) \\ &= \xi(\tau g'(0) + \frac{t}{2} \xi^2 \int_0^1 (1 - \theta)^2 g^{(3)}(\theta \xi) d\theta) \end{aligned}$$

D'où

$$\xi_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2\tau}{t \int_0^1 (1 - \theta)^2 g^{(3)}(\theta \xi_{\pm}) d\theta}}$$

On remarque que  $\xi_+$  et  $\xi_-$  sont des fonctions  $C^{p-3}$  de  $\sqrt{\tau}$ . De plus :

$$\xi_{\pm} \sim \pm \sqrt{\tau}.$$

On obtient donc :

$$\xi_+(t) + \xi_-(t) = O(\tau).$$

Le lemme 3.1.2 est donc prouvé  $\square$

### 3.2 Equation de Rankine-Hugoniot.

On note  $x = \varphi(t)$  l'équation de la courbe de choc. On obtient alors un choc admissible si la fonction  $\varphi$  vérifie l'équation de Rankine-Hugoniot suivante :

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \varphi'(t) = \frac{f(u_0(y_+(t, \varphi(t)))) - f(u_0(y_-(t, \varphi(t))))}{u_0(y_+(t, \varphi(t))) - u_0(y_-(t, \varphi(t)))} \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

On pose :

$$(3.2.2) \quad a(x, y) = \frac{f(u_0(x)) - f(u_0(y))}{u_0(x) - u_0(y)}.$$

Avant de résoudre l'équation (3.2.1), on montre le :

**Lemme 3.2.1.**

- (1) La fonction  $a$  est bornée et symétrique sur  $\mathbb{R}^2$ .
- (2)  $a \in C^p(\mathbb{R}^2)$ .
- (3)  $a(x, y) = -\frac{1}{2}(x + y) + b(x, y)$  avec  $b(x, y) = O(x^2 + y^2)$
- (4)  $a(\cdot, y)$  est une fonction strictement croissante.

*Preuve.*

Les deux premières parties du lemme sont évidentes d'après la régularité de  $f$  et  $u_0$ .

Posons  $c(y, \theta) = a(y + \theta, y - \theta)$ . Pour montrer le troisième point, il suffit de prouver que  $c(y, \theta) = -y + O(y^2 + \theta^2)$ .

$c(y, \cdot)$  est une fonction paire donc  $c(y, \theta) = c(y, 0) + O(\theta^2)$  or on a :  
 $c(y, 0) = a(y, y) = g(y) = -y + O(y^2)$  d'où le résultat.

Le quatrième point est une conséquence de l'hypothèse (2.1.6). En effet, on peut également écrire  $a(x, y)$  sous la forme suivante :

$$a(x, y) = \int_0^1 f'(u_0(x) + \theta(u_0(y) - u_0(x))) d\theta.$$

On obtient alors en dérivant par rapport à  $x$  :

$$\partial_x a(x, y) = \int_0^1 (1 - \theta) u'_0(x) f^{(2)}(u_0(x) + \theta(u_0(y) - u_0(x))) d\theta$$

or  $u'_0$  et  $f^{(2)}$  sont de signes opposés, donc  $a(\cdot, y)$  est une fonction strictement croissante  $\square$

On résout maintenant l'équation de Rankine-Hugoniot.

**Lemme 3.2.2.**

*L'équation différentielle*

$$(3.2.7) \quad \begin{cases} \varphi'(t) = a(y_+(t, \varphi(t)), y_-(t, \varphi(t))) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

admet une solution globale appartenant à  $C^1([t_0, +\infty[) \cap C^p(]t_0, +\infty[)$  et on a :

$$(3.2.8) \quad \begin{cases} x_+(t) \leq \varphi(t) < x_-(t) \text{ pour } t > t_0 \\ \varphi(t) = O(\tau^2) \end{cases}$$

*Preuve.*

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(3.2.9) \quad \begin{cases} \varphi'(t) = a(\tilde{y}_+(t, \varphi(t)), \tilde{y}_-(t, \varphi(t))) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

La fonction  $(t, x) \rightarrow a(\tilde{y}_+(t, x), \tilde{y}_-(t, \varphi))$  est continue et bornée sur  $]t_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  donc, d'après le théorème de Péano, l'équation (3.2.9) admet au moins une solution globale appartenant à  $C^1(]t_0, +\infty[)$ . De plus on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi(t)^2) &= 2\varphi(t)\varphi'(t) \\ &= 2\varphi(t)a(\tilde{y}_+(t, \varphi(t)), \tilde{y}_-(t, \varphi(t))). \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 3.1.1 et 3.2.1, on en déduit que :

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)^2) = -\varphi(t)(\tilde{y}_+(t, \varphi(t)) + \tilde{y}_-(t, \varphi(t))) + O(\tau)\varphi(t)$$

et, d'après le lemme 3.1.2, il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour tout  $t \geq t_0$ , on ait :

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)^2) \leq C\tau|\varphi|.$$

En intégrant, on obtient alors :

$$|\varphi(t)| \leq \frac{C}{4}\tau^2.$$

D'après le lemme 3.1.1, il existe donc  $t_1$  vérifiant  $t_0 < t_1 \leq +\infty$  tel que, pour tout  $t \in ]t_0, t_1[$ , on ait :

$$x_+(t) < \varphi(t) < x_-(t).$$

Remarquons que l'on a, pour  $t > t_0$ , d'après le lemme 3.2.1 :

$$\begin{aligned} a(\tilde{y}_+(t, x_-(t)), \tilde{y}_-(t, x_-(t))) &= a(y_+(t, x_-(t)), \eta_-(t)) \\ &< a(\eta_-(t), \eta_-(t)) = g(\eta_-(t)) = x'_-(t). \end{aligned}$$

On montre de même que :

$$x'_+(t) < a(\tilde{y}_+(t, x_+(t)), \tilde{y}_-(t, x_-(t))).$$

On déduit de ces deux inégalités que la courbe  $(t, \varphi(t))$  ne peut pas couper les courbes  $(t, x_-(t))$  et  $(t, x_+(t))$ , ce qui nous donne :

$$\forall t \in ]t_0, +\infty[ \quad x_+(t) < \varphi(t) < x_-(t)$$

et  $a(\tilde{y}_+(t, \varphi(t)), \tilde{y}_-(t, \varphi(t))) = a(y_+(t, \varphi(t)), y_-(t, \varphi(t)))$ , et  $\varphi$  est donc solution globale de (3.2.7).

$a$ ,  $y_-$  et  $y_+$  étant des fonctions  $C^p$  sur leur domaine de définition, on a également :

$$\varphi \in C^p(]t_0, +\infty[).$$

On va maintenant étudier plus précisément la régularité de  $u$  et de  $\varphi$ .

## 4. Régularité de la solution

### 4.1 Régularité de la courbe de choc.

On va montrer que la solution  $\varphi$  de l'équation de Rankine-Hugoniot (3.2.1) a la régularité suivante :

#### Proposition 4.1.1.

La fonction  $\varphi$  solution de l'équation de Rankine-Hugoniot appartient à  $C^{\frac{3}{2}}([t_0, +\infty[) \cap C^p(]t_0, +\infty[)$ .

On sait déjà, d'après le lemme 3.2.2 que  $\varphi$  est une fonction  $C^1$  sur  $[t_0, +\infty[$ . Dans les deux premiers lemmes, on étudie la régularité de la fonction  $\varphi$  par rapport à la variable  $\sqrt{\tau}$  puis on montre le résultat en étudiant son développement limité.

On pose :

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} s = \sqrt{\tau} \\ \lambda = \frac{x}{s^3} \\ \mu = \frac{y}{s} \end{cases}$$

On commence par étudier la régularité des fonctions  $y_+$  et  $y_-$ .

#### Lemme 4.1.1.

Les fonctions  $(s, \lambda) \rightarrow s^\alpha y_+(t, x)$  et  $(s, \lambda) \rightarrow s^\alpha y_-(t, x)$  sont de classe  $C^{p-2+\alpha}$  pour  $\alpha = -1, 0, 1, 2$ . De plus, on a :

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} y_+(t, x) = s \left( 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{g^{(4)}(0)}{48} s \right) + O(s^3 + s\lambda^2) \\ y_-(t, x) = s \left( -1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{g^{(4)}(0)}{48} s \right) + O(s^3 + s\lambda^2) \end{cases}$$

*Preuve.*

$y_+(t, x)$  et  $y_-(t, x)$  sont respectivement la plus grande et la plus petite racine de :

$$(4.1.3) \quad y + tg(y) = x.$$

On définit la fonction  $h$  appartenant à  $C^{p-3}(\mathbb{R})$  nulle en 0 par :

$$h(y) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2} g^{(3)}(\theta y) d\theta - 1.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale permet d'écrire l'équation (4.1.3) sous la forme suivante en utilisant les notations (4.1.1) :

$$(4.1.4) \quad F(s, \lambda, \mu) \stackrel{\text{dét}}{=} (1+s^2)\mu^3 - \mu + (1+s^2)\mu^3 h(s\mu) - \lambda = 0$$

Le changement de variables (4.1.1) permet de séparer les solutions de l'équation (4.1.3) et donc d'utiliser le théorème des fonctions implicites. En effet, si l'on prend  $(s, \lambda) = (0, 0)$ , ce qui correspond à  $(t, x) = (1, 0)$ , l'équation (4.1.4) admet trois racines distinctes :

$$\begin{cases} \mu_+ = 1 \\ \mu_- = -1 \\ \mu_c = 0 \end{cases}$$

De plus, on a  $\partial_\mu F(0, 0, \mu_\pm) = 2$ . Le théorème des fonctions implicites nous dit alors que  $\mu_+$  et  $\mu_-$  sont des fonctions de classe  $C^{p-3}$  sur un voisinage de  $(0, 0)$  des variables  $s$  et  $\lambda$  ; on a donc montré le lemme pour  $\alpha = -1$ .

Cherchons maintenant un développement limité de  $\mu_\pm$  par identification. Faisons-le pour  $\mu_+$ . On a supposé  $p \geq 4$ , on peut donc poser :  $\mu_+(\sqrt{\tau}, \lambda) = 1 + a\sqrt{\tau} + b\lambda + O(s^2 + \lambda^2)$ . On introduit cette expression dans l'équation (4.1.4) et, après calcul, on trouve :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{48} g^{(4)}(0) \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \square$$

On note  $\mu(s, \lambda)$  l'une des deux solutions  $\mu_+(s, \lambda)$  ou  $\mu_-(s, \lambda)$ .  $\mu$  vérifie :

$$(4.1.5) \quad F(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = 0.$$

On appelle  $\mu'$  l'une des dérivées partielles de  $\mu$ . On a l'identité suivante :

$$(4.1.6) \quad (s\mu)' = s\mu' + \mu.$$

Il suffit donc de montrer que  $s\mu'$  est de classe  $C^{p-3}$  pour avoir le résultat du lemme avec  $\alpha = 0$ . Faisons-le par exemple pour  $s \frac{\partial \mu}{\partial s}$ . On dérive l'équation (4.1.5) par rapport à  $s$  et on obtient :

$$(4.1.7) \quad \begin{cases} F_1(s, \lambda, \mu(s, \lambda))\mu' + F_2(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = 0 \\ F_1(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = (3\mu^2(1 + h(s\mu)) + \mu^3 sh'(s\mu))(1 + s^2) - 1 \\ F_2(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = 2s\mu^3(1 + h(s\mu)) + (1 + s^2)\mu^4 h'(s\mu) \end{cases}$$

or la fonction  $y \rightarrow yh'(y)$  est de classe  $C^{p-3}$  donc les fonctions  $F_1$  et  $sF_2$  le sont également. De plus, on a  $F_1(0, 0, \pm 1) = 1$  et  $\mu$  est de classe  $C^{p-3}$  d'après ce qu'on vient de montrer  $s\mu'$  est alors une fonction de classe  $C^{p-3}$  sur un voisinage de l'origine.

En utilisant une identité comparable à celle écrite en (4.1.6), on voit qu'il suffit de montrer que  $s^2\mu''$  et  $s^3\mu^{(3)}$  sont respectivement de classe  $C^{p-3}$  et  $C^{p-2}$  pour obtenir la régularité de  $s^2\mu$  et  $s^3\mu$  où le prime représente une dérivée par rapport à  $\lambda$  ou  $s$ . On dérive l'équation (4.1.7) multipliée par  $s$  pour pouvoir utiliser que la fonction  $y \rightarrow yh'(y)$  est de classe  $C^{p-3}$ , on multiplie l'équation obtenue par  $s$  et on montre alors que  $s^2\mu''$  est de classe  $C^{p-3}$ . On recommence le même processus pour obtenir la régularité de  $s^3\mu^{(3)}$ .

**Lemme 4.1.2.**

- (1) La fonction  $s \rightarrow \varphi'(t)$  est de classe  $C^{p-2}$  sur  $[0, +\infty[$ .  
 (2) La fonction  $\varphi$  est de classe  $C^2$  sur  $[t_0, +\infty[$ .

*Preuve.*

On définit la fonction  $\lambda$  par :

$$(4.1.8) \quad \lambda(s) = \frac{\varphi(t)}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varphi(1+s^2)}{s^3}.$$

D'après le lemme 3.2.2, on a l'estimation :

$$(4.1.9) \quad \lambda(s) = O(s).$$

Pour  $s$  strictement positif, la fonction  $\lambda$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} s\lambda'(s) + 3\lambda(s) &= \frac{2}{s} a(y_+(1+s^2, s^3\lambda(s)), y_-(1+s^2, s^3\lambda(s))) \\ &= -(\mu_+(s, \lambda) + \mu_-(s, \lambda)) + \frac{2}{s} b(s\mu_+, s\mu_-) \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2.1.

On définit la fonction  $d$  par :

$$(4.1.10) \quad d(s, \lambda) = -\frac{\mu_+(s, \lambda) + \mu_-(s, \lambda) - \lambda}{s} + \frac{2}{s^2} b(s\mu_+, s\mu_-).$$

On déduit des lemmes 3.2.1 et 4.1.2 que la fonction  $(s, \lambda) \rightarrow s^\alpha d(s, \lambda)$  est de classe  $C^{p-4+\alpha}$  pour  $\alpha = 0, 1, 2$ .  $\lambda$  vérifie alors une équation différentielle de type Fuchs :

$$(4.1.11) \quad \begin{cases} s\lambda'(s) + 4\lambda(s) = sd(s, \lambda(s)) \\ \lambda(0) = 0 \end{cases}$$

c'est alors une fonction de classe  $C^{p-3}$  d'après le théorème démontré en annexe. On a vu que la fonction  $sd$  est de classe  $C^{p-3}$  donc, d'après l'équation (4.1.11),  $s\lambda'$  aussi. L'identité (4.1.6) implique que  $s\lambda$  est de classe  $C^{p-2}$ . En multipliant l'équation (4.1.11) par  $s$ , on en déduit que la fonction  $s \rightarrow s^\alpha \lambda(s)$  est de classe  $C^{p-3+\alpha}$  pour  $\alpha = 0, 1, 2$ . On a alors montré le premier point du lemme.

On pose :

$$(4.1.12) \quad \rho(s) = \varphi'(t).$$

On vient de montrer que  $\rho$  est de classe  $C^{p-2}$  sur  $[0, +\infty[$ . De plus, d'après (3.2.8), on a  $\rho(0) = \rho'(0) = 0$ , donc :

$$\varphi^{(2)}(t) = \frac{1}{2s} \rho'(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^{(2)}(s\theta) d\theta.$$

On a supposé  $p \geq 4$  donc la fonction  $\rho^{(2)}$  est au moins continue et on peut alors prolonger continûment  $\varphi^{(2)}$  en  $t = 1$ . La fonction  $\varphi$  est donc de classe  $C^2$  sur  $[1, +\infty[$   $\square$

Les fonctions  $t \rightarrow \varphi'(t)$ ,  $t \rightarrow y_+(t, \varphi(t))$  et  $t \rightarrow y_-(t, \varphi(t))$  admettent donc des développements limités d'ordre  $p - 2$  par rapport à la variable  $s$ . On va maintenant montrer que les termes d'ordre impair sont nuls. On pose :

$$(4.1.13) \quad \begin{cases} \sigma(s) = \frac{y_+(t, \varphi(t)) + y_-(t, \varphi(t))}{2} \\ \delta(s) = \frac{y_+(t, \varphi(t)) - y_-(t, \varphi(t))}{2s} \end{cases}$$

On a vu que la fonction  $\rho$  définie en (4.1.12) et la fonction  $\sigma$  sont de classe  $C^{p-2}$  sur  $[0, +\infty[$  tandis que la fonction  $\delta$  est de classe  $C^{p-3}$ . En utilisant les lemmes 3.2.2 et 4.1.1, on peut alors écrire :

$$(4.1.14) \quad \begin{cases} \rho(s) = \sum_{k=2}^{p-2} \rho_k s^k + o(s^{p-2}) \\ \sigma(s) = \sum_{k=2}^{p-2} \sigma_k s^k + o(s^{p-2}) \\ \delta(s) = 1 + \sum_{k=2}^{p-3} \delta_k s^k + o(s^{p-3}) \end{cases}$$

De plus,  $y_+(t, \varphi(t))$  et  $y_-(t, \varphi(t))$  sont solutions de l'équation :

$$y + tg(y) = \varphi(t).$$

En additionnant et en retranchant les deux équations obtenues et en utilisant le changement de variables (4.1.13), on obtient que les fonctions  $\delta$  et  $\sigma$  vérifient le système :

$$(4.1.15) \quad \begin{cases} \sigma(s) + (1 + s^2) \frac{g(\sigma(s) + s\delta(s)) + g(\sigma(s) - s\delta(s))}{2} = \varphi(1 + s^2) \\ 1 + (1 + s^2) \frac{g(\sigma(s) + s\delta(s)) - g(\sigma(s) - s\delta(s))}{2s\delta(s)} = 0 \end{cases}$$

L'équation de Rankine-Hugoniot s'écrit alors avec ces nouvelles variables :

$$(4.1.16) \quad \rho(s) = a(\sigma(s) + s\delta(s), \sigma(s) - s\delta(s))$$

Ces trois relations vont nous permettre de démontrer le lemme suivant par récurrence :

**Lemme 4.1.3.**

Les coefficients  $\rho_k, \sigma_k$  et  $\delta_k$ , intervenant dans (4.1.14), sont nuls si  $k$  est impair.

*Preuve.*

La forme (4.1.14) montre déjà que  $\sigma_1 = \delta_1 = \rho_1 = 0$ . On va alors procéder par récurrence. On suppose donc que l'hypothèse de récurrence suivante est vérifiée :

$$(P_l) \quad \rho_{2j-1} = \sigma_{2j-1} = \delta_{2j-1} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq l-1.$$

Si  $p \leq 2l$ , le lemme est démontré ; on suppose donc  $p \geq 2l+1$ . Le système (4.1.14) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$(4.1.17) \quad \begin{cases} \rho(s) = p(s^2) + \rho_{2l-1}s^{2l-1} + o(s^{2l-1}) \\ \sigma(s) = s^2q(s^2) + \sigma_{2l-1}s^{2l-1} + o(s^{2l-1}) \\ \delta(s) = 1 + s^2r(s^2) + o(s^{2l-2}) \end{cases}$$

où  $p, q$  et  $r$  sont des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ . Nous allons montrer que les coefficients  $\rho_{2l-1}$  et  $\sigma_{2l-1}$  sont nuls. On utilise d'abord l'équation (4.1.16). D'après le lemme 3.2.1, on a :

$$\begin{aligned} \rho(s) &= a(\sigma(s) + s\delta(s), \sigma(s) - s\delta(s)) \\ &= -\sigma(s) + b(\sigma(s) + s\delta(s), \sigma(s) - s\delta(s)) \\ &= -\sigma(s) + P(\sigma(s), s\delta(s)) + o(s^{2l-1}) \end{aligned}$$

où  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X_1, X_2]$  de valuation deux et ne contenant que des termes de degré pair en  $X_2$ . On identifie alors les termes de degré  $2l-1$  et on trouve :

$$(4.1.18) \quad \rho_{2l-1} = -\sigma_{2l-1}.$$

Par définition de  $\rho$ , on a également :

$$(4.1.19) \quad \varphi(1+s^2) = \pi(s^2) + 2 \frac{\rho_{2l-1}}{2l+1} s^{2l+1} + o(s^{2l+1})$$

où  $\pi$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de valuation deux d'après le lemme 3.2.2. D'autre part, on a supposé que  $g$  est une fonction de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g(0) = g^{(2)}(0) = 0, g'(0) = -1$  et  $g^{(3)}(0) = 6$ . Il existe donc un polynôme  $R$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que :

$$(4.1.20) \quad \begin{cases} g(\sigma + s\delta) = -(\sigma + s\delta) + (\sigma + s\delta)^3 + (\sigma + s\delta)^4 R(\sigma + s\delta) + o(s^p) \\ g(\sigma - s\delta) = -(\sigma - s\delta) + (\sigma - s\delta)^3 + (\sigma - s\delta)^4 R(\sigma - s\delta) + o(s^p) \end{cases}$$

On pose :

$$(4.1.21) \quad \begin{cases} Q(\sigma, s\delta) = \frac{(\sigma + s\delta)^4 R(\sigma + s\delta) - (\sigma - s\delta)^4 R(\sigma - s\delta)}{2s\delta} \\ T(\sigma, s\delta) = \frac{(\sigma + s\delta)^4 R(\sigma + s\delta) + (\sigma - s\delta)^4 R(\sigma - s\delta)}{2} \end{cases}$$

$Q$  et  $T$  sont des polynômes de  $\mathbb{R}[X_1, X_2]$  de valuation respectivement trois et quatre et n'ayant que des termes de degré pair en  $X_2$ . La première équation du système (4.1.15) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$(4.1.22) \quad \begin{aligned} (1 + s^2)(\sigma(s)^3 + 3s^2\sigma(s)\delta(s)^2 + T(\sigma(s), s\delta(s))) = \\ s^2\sigma(s) + \varphi(1 + s^2) + o(s^p) \end{aligned}$$

On identifie les termes de degré  $2l + 1$  avec l'aide de l'égalité (4.1.19) et on trouve :

$$(4.1.23) \quad 3\sigma_{2l-1} = 2 \frac{\rho_{2l-1}}{2l+1}.$$

Les égalités (4.1.18) et (4.1.23) montrent alors que  $\sigma_{2l-1} = \rho_{2l-1} = 0$ .

Pour achever la démonstration, il faut montrer que, si  $p \geq 2l + 2$ , on a  $\delta_{2l-1} = 0$ . Le système (4.1.14) s'écrit maintenant :

$$(4.1.24) \quad \begin{cases} \rho(s) = p(s^2) + o(s^{2l}) \\ \sigma(s) = s^2 q(s^2) + o(s^{2l}) \\ \delta(s) = 1 + s^2 r(s^2) + \delta_{2l-1} s^{2l-1} + o(s^{2l-1}) \end{cases}$$

On utilise alors la deuxième équation du système (4.1.15). On l'écrit à l'aide du polynôme  $Q$  défini en (4.1.21) et on obtient :

$$(4.1.25) \quad (1 + s^2)(3\sigma(s)^2 + s^2\delta(s)^2) = s^2 - (1 + s^2)Q(\sigma(s), s\delta(s)) + o(s^{2l-1}).$$

On égale alors les termes de degré  $2l + 1$  et on trouve que le coefficient  $\delta_{2l-1}$  est nul  $\square$

Le lemme suivant démontré par H. Whitney [18] va nous permettre de prouver la proposition 4.1 :

**Lemme 4.1.4.**

Soit  $f \in C^k(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  une fonction paire, alors il existe une fonction  $g$  de classe  $C^{\frac{k}{2}}$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $f(x) = g(x^2)$ .

On définit la fonction  $\tilde{\rho}$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(s) &= \rho(s) & \text{si } s \geq 0 \\ &= \rho(-s) & \text{si } s \leq 0 \end{aligned}$$

La fonction  $\tilde{\rho}$  est une fonction de classe  $C^{p-2}$  sur  $\mathbb{R}$  d'après le lemme 4.1.3 ; elle est paire par construction. Il existe donc une fonction  $g$  de classe  $C^{\frac{p}{2}-1}$  telle que :

$$\tilde{\rho}(s) = g(s^2).$$

La fonction  $\varphi'$  est donc de classe  $C^{\frac{p}{2}-1}$  sur  $[t_0, +\infty[$  et on a montré la proposition 4.1.1  $\square$

On prouve de la même manière que les fonctions  $t \rightarrow \sigma(s)$  et  $t \rightarrow \delta(s)$  sont respectivement de classe  $C^{\frac{p}{2}-1}$  et  $C^{\frac{p}{2}-\frac{3}{2}}$ .

*Remarque.* La régularité de  $\varphi$  en  $t_0$ , obtenue dans la proposition 4.1.1, est optimale.

En effet, considérons le cas de l'équation de Burgers avec comme condition initiale  $u_0(x) = -x + x^3 + |x|^{4+\varepsilon}$  et  $\varepsilon > 0$ . L'équation de Rankine-Hugoniot est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{2} \left( u_0(y_+(t, \varphi(t))) + u_0(y_-(t, \varphi(t))) \right) \\ &= \frac{\varphi(t)}{t} - \frac{y_+(t, \varphi(t)) + y_-(t, \varphi(t))}{2t} \end{aligned}$$

car  $y_+(t, \varphi(t))$  et  $y_-(t, \varphi(t))$  sont solutions de  $\varphi(t) = y + tu_0(y)$ .

On a  $u_0 \in C^{4+\varepsilon}(\mathbb{R})$ . On fait un développement limité de  $y_+(t, \varphi(t))$  et  $y_-(t, \varphi(t))$  comme précédemment et on obtient après calcul :

$$\begin{cases} y_+(t, \varphi(t)) = \sqrt{t-t_0} \left( 1 + \frac{\varphi(t)}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}(t-t_0)^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} \right) + o((t-t_0)^{\frac{\varepsilon}{2}}) \\ y_-(t, \varphi(t)) = -\sqrt{t-t_0} \left( 1 - \frac{\varphi(t)}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}(t-t_0)^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} \right) + o((t-t_0)^{\frac{\varepsilon}{2}}) \end{cases}$$

On applique ce développement à l'équation de Rankine-Hugoniot, ce qui donne :

$$\varphi'(t) - \frac{2-t}{t-t_0} \varphi(t) = \frac{1}{2t} (t-t_0)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + o((t-t_0)^{\frac{\varepsilon}{2}})$$

or, si la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^k$ , le premier membre est de classe  $C^{k-1}$  donc on a nécessairement :

$$k \leq 2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

et la solution  $\varphi$  de cette équation de Rankine-Hugoniot est exactement de classe  $C^{\frac{p}{2}}$ .

#### 4.2 Régularité de la solution $u$ .

On pose :

$$\Omega_+^\varphi = \{(t, x); t \leq t_0 \text{ ou } x > \varphi(t)\}$$

$$\Omega_-^\varphi = \{(t, x); t \leq t_0 \text{ ou } x < \varphi(t)\}$$

On a défini la solution  $u$  de l'équation (1.1.1) par :

$$(4.2.1) \quad u(t, x) = \begin{cases} u_+(t, x) = u_0(y_+(t, x)) & \text{si } (t, x) \in \Omega_+^\varphi \\ u_-(t, x) = u_0(y_-(t, x)) & \text{si } (t, x) \in \Omega_-^\varphi \end{cases}$$

**Lemme 4.2.1.**

- (1) La fonction  $u$  est de classe  $C^p$  sur  $\Omega \setminus \{(t, x); x = \varphi(t)\}$ .
- (2) La fonction  $t \rightarrow s[u]$  est de classe  $C^{\frac{p}{2}-1}$  sur  $[t_0, +\infty[$ .

*Preuve.*

Le premier point a déjà été montré dans les paragraphes précédents.

On a :

$$(4.2.2) \quad \begin{cases} u_+(t, \varphi(t)) = u_0(y_+(t, \varphi(t))) \\ u_-(t, \varphi(t)) = u_0(y_-(t, \varphi(t))) \end{cases}$$

On en déduit avec la notation (4.1.13) que :

$$s[u] = s(u_0(\sigma(s) + s\delta(s)) - u_0(\sigma(s) - s\delta(s))).$$

La fonction  $s \rightarrow s[u]$  est donc paire et de classe  $C^{p-2}$ ; le lemme 4.1.4 donne alors le résultat  $\square$

**Lemme 4.2.2.**

Sur un voisinage de  $(t_0, x_0)$  dans  $\Omega_+^\varphi \cap \{(t, x); t \geq t_0\}$ , il existe une constante  $C_0$  telle que la fonction  $u$  vérifie les estimations suivantes sur  $\overline{\Omega}_+^\varphi$  :

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u(t_0, x_0)| &\leq C_0 ((t - t_0)^3 + (x - x_0)^2)^{\frac{1}{6}} \\ |\partial_x u(t, x)| &\leq \frac{C_0}{((t - t_0)^3 + (x - x_0)^2)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{si } x \neq x_0, t \neq t_0 \\ |\partial_{x^2}^2 u(t, x)| &\leq \frac{C_0}{((t - t_0)^3 + (x - x_0)^2)^{\frac{5}{6}}} \quad \text{si } x \neq x_0, t \neq t_0 \end{aligned}$$

*Preuve.*

On a vu qu'on pouvait se ramener au cas  $t_0 = 1$  et  $x_0 = 0$ . La fonction  $u_0$  est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$ , donc, d'après (4.2.1), il suffit de montrer ces estimations sur la fonction  $y_+$ . On va d'abord montrer les inégalités suivantes sur  $\Omega_+^\varphi \cap \{(t, x); t \geq t_0\}$  :

$$(4.2.3) \quad \frac{2}{3}(r^3 + x^2)^{\frac{1}{6}} \leq y_+(t, x) \leq \frac{3}{2}(r^3 + x^2)^{\frac{1}{6}}$$

avec  $\tau = t - t_0$ . Ces inégalités nous donnent la première estimation du lemme.  $y_+(t, x)$  est la plus grande solution de l'équation :

$$(4.2.4) \quad x = y + tg(y)$$

On pose alors :

$$(4.2.5) \quad \begin{cases} v = (\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{6}} \\ T = \frac{\tau}{v^2} \\ X = \frac{x}{v^3} \\ Y = \frac{y}{v} \\ Y_+ = \frac{y_+(t, x)}{v} \end{cases}$$

On remarque que  $T$  et  $X$  sont dans l'intervalle  $[0, 1]$  pour  $(t, x) \in \Omega_+^c$  et  $T$  et  $X$  tendent vers 1 si l'on fait tendre  $(t, x)$  vers  $(t_0, 0)$  en restant dans  $\Omega_+^c$  d'après le lemme 3.2.2. Le lemme 4.1.1 montre également que  $Y_+$  tend, dans ce cas, vers 1.

D'après les hypothèses (2.2.8) faites sur la fonction  $g$ , il existe une fonction  $h$  de classe  $C^{p-3}$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g(x) = -x + x^3h(x)$  avec  $h(0) = 1$  et on définit une fonction  $F$  par :

$$(4.2.6) \quad F(\tau, T, X, Y) = X + TY - (1 + \tau)Y^3h(vY).$$

L'équation (4.2.4) nous donne  $F(0, 1, 1, 1) = 0$ . De plus, on a également  $\partial_Y F(0, 1, 1, 1) = -2$  donc, d'après le théorème des fonctions implicites,  $Y_+$  est une fonction  $C^{p-3}$  des variables  $\tau, T$  et  $X$ .

On a, en particulier,  $Y_+ = 1 + O(\tau + |T - 1| + |X - 1|)$  et, pour  $\tau, |T - 1|$  et  $|X - 1|$  assez petits :

$$\frac{2}{3} \leq Y_+ \leq \frac{3}{2}.$$

On va maintenant estimer  $\partial_x y_+(t, x)$  pour  $(t, x) \neq (t_0, x_0)$ . D'après l'égalité (4.2.4), on a :

$$(4.2.7) \quad \partial_x y_+(t, x) = \frac{1}{1 + tg'(y_+(t, x))}.$$

On a vu, dans le paragraphe 2.2, que  $1 + tg'(y_+(t, x)) > 0$ ; il suffit donc de minorer ce terme pour obtenir le résultat. En utilisant les hypothèses faites sur la fonction  $g$  et l'estimation (4.2.3), on obtient :

$$(4.2.8) \quad \begin{aligned} 1 + tg'(y_+(t, x)) &= 1 + t(-1 + 3y_+^2(t, x)) + O((\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}) \\ &= 3y_+^2(t, x) - \tau + O((\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}) \\ &\geq \frac{1}{2} (3y_+^2(t, x) - \tau) \text{ pour } \tau \text{ et } x \text{ assez petits.} \end{aligned}$$

Or on a, pour  $\tau$  et  $x$  assez petits :

$$\begin{aligned} 3y_+^2(t, x) - \tau &\geq \frac{4}{3}(\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{3}} - \tau \\ &\geq c(\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

On obtient la dernière estimation en dérivant (4.2.7) par rapport à  $x$  et en utilisant cette inégalité  $\square$

## CHAPITRE II

### ETUDE DE LA FORMATION D'UN CHOC DANS LE P-SYSTEME

Nous cherchons, dans ce chapitre, à construire une solution faible du p-système présentant un choc admissible. Nous allons travailler au moyen des invariants de Riemann qui permettent de diagonaliser un système à deux équations et nous utiliserons un schéma itératif pour construire la solution afin d'avoir des équations linéaires à résoudre. Nous commencerons ce schéma en se donnant une fonction solution de l'équation scalaire étudiée dans le premier chapitre.

#### 1. Position du problème.

Ce paragraphe sert à donner les notations utilisées ultérieurement et en particulier à définir les invariants de Riemann. On étudiera également les équations de Rankine-Hugoniot écrites dans ces nouvelles variables.

##### 1.1 Le p-système.

On se donne une fonction régulière  $p$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles et on considère le système suivant :

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + \partial_x p(u) &= 0 \end{cases}$$

On suppose que ce système est strictement hyperbolique et que ses valeurs propres sont vraiment non linéaires. On a alors :

$$(1.1.2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} p'(x) < 0 \\ p''(x) \neq 0 \end{cases}$$

On va supposer par exemple que :

$$(1.1.3) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad p''(x) > 0$$

##### 1.2 Les invariants de Riemann.

On note  $(r_1(u), r_2(u))$  une base de vecteurs propres de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(u) & 0 \end{pmatrix}$  que l'on a supposée diagonalisable et de valeurs propres  $\lambda(u)$

et  $-\lambda(u)$  non nulles. Les invariants de Riemann  $w$  et  $z$  associés au système (1.1.1) sont définis, à une constante multiplicative près, par :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \text{grad } w(u, v) \cdot r_1(u) = 0 \\ \text{grad } z(u, v) \cdot r_2(u) = 0 \end{cases}$$

On définit la fonction  $F$  par :

$$(1.2.1) \quad F'(u) = \sqrt{-p'(u)}.$$

et on peut alors prendre :

$$(1.2.2) \quad \begin{cases} w = \frac{1}{2}(v - F(u)) \\ z = \frac{1}{2}(v + F(u)) \end{cases}$$

Si le système (1.1.1) admet une solution régulière, il s'écrit aux moyens des invariants de Riemann sous la forme diagonale suivante :

$$\begin{cases} \partial_t w + \lambda(w, z) \partial_x w = 0 \\ \partial_t z - \lambda(w, z) \partial_x z = 0 \end{cases}$$

On introduit de nouvelles notations pour simplifier l'écriture de  $\lambda$ . On remarque que la fonction  $F'$  est strictement positive donc on peut définir la fonction réciproque de  $F'$  et on pose :

$$(1.2.3) \quad \begin{cases} G = F'^{-1} \\ H = -p(G) \end{cases}$$

On vérifie alors que :

$$(1.2.4) \quad \begin{cases} H'G' = 1 \\ H' > 0 & G' > 0 \\ H'' < 0 & G'' > 0 \end{cases}$$

On suppose que les fonctions  $H$  et  $G$  sont de classe  $C^{p+1}$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $p \geq 4$ . On calcule alors  $\lambda$  et on vérifie que le système (1.1.1) s'écrit au moyen de ses invariants de Riemann sous la forme suivante :

$$(1.2.5) \quad \begin{cases} \partial_t w + H'(z - w) \partial_x w = 0 \\ \partial_t z - H'(z - w) \partial_x z = 0 \end{cases}$$

On va chercher à résoudre ce système en y ajoutant des conditions de Cauchy mais on va d'abord étudier les équations de Rankine-Hugoniot.

### 1.3 Les équations de Rankine-Hugoniot.

#### 1.3.1 Les équations.

Pour obtenir une solution faible du système (1.1.1), il faut que les équations de Rankine-Hugoniot soient vérifiées. On note  $\sigma$  la pente du choc et on doit alors avoir :

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} \sigma [u] = -[v] \\ \sigma [v] = [p(u)] \end{cases}$$

où les crochets représentent le saut de la fonction au passage de la courbe de choc. On va commencer par écrire ces équations au moyen des invariants de Riemann. D'après (1.2.2) et (1.2.3), on a :

$$\begin{cases} u = G(z - w) \\ v = z + w \\ p(u) = -H(z - w) \end{cases}$$

Le système (1.3.1) devient alors :

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} \sigma [G(z - w)] = -[z + w] \\ \sigma [z + w] = -[H(z - w)] \end{cases}$$

On les utilisera plutôt sous la forme suivante :

$$(1.3.3) \quad \begin{cases} \sigma = -\sqrt{\frac{[H(z - w)]}{[G(z - w)]}} & (RH_1) \\ [z + w]^2 = [G(z - w)] [H(z - w)] & (RH_2) \end{cases}$$

*Remarque.* Les deux systèmes précédents ne sont pas équivalents mais on construit la solution pour obtenir un choc sur la fonction  $z$  ; si on numérote les valeurs propres par ordre croissant, on a alors un 1-choc admissible si les conditions de Lax sont vérifiées, c'est-à-dire si :

$$\begin{cases} \sigma < -H'(z_- - w_-) = \lambda_1(z_-, w_-) \\ \lambda_1(z_+, w_+) = -H'(z_+ - w_+) < \sigma < H'(z_+ - w_+) = \lambda_2(z_+, w_+) \end{cases}$$

On choisit donc de prendre la pente  $\sigma$  négative.

On va donner quelques résultats concernant ces deux équations.

#### 1.3.2 Etude formelle de $(RH_1)$ .

On fixe  $x \in \mathbb{R}$  et on définit la fonction  $f$  de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(y) = -\sqrt{\frac{H(x+y) - H(x)}{G(x+y) - G(x)}} & \text{si } y \neq 0 \\ f(0) = -H'(x) \end{cases}$$

**Lemme 1.3.1.**

Pour  $y$  assez petit, on a :

$$f(y) = -H'(x) - \frac{1}{2}yH''(x) - \frac{1}{6}y^2H^{(3)}(x) \\ - \frac{1}{24}y^2H''(x)G''(x)H'(x) + O(y^3).$$

*Preuve.*

On fait un développement limité de la fonction  $H$  en  $x$  :

$$H(x+y) - H(x) = y\left(H'(x) + \frac{1}{2}yH''(x) + \frac{1}{6}y^2H^{(3)}(x) + O(y^3)\right)$$

On fait de même pour  $G$  et, en utilisant (1.2.4), on obtient :

$$\frac{H(x+y) - H(x)}{G(x+y) - G(x)} = (H'(x))^2 \left(1 + yH''(x)G'(x) + \frac{y^2}{3}H^{(3)}(x) \right. \\ \left. - \frac{1}{6}y^2H''(x)G''(x) + O(y^3)\right)$$

On prend la racine carrée de cette expression en remarquant que  $H' > 0$  et on a prouvé le lemme  $\square$

**1.3.3 Etude formelle de  $(RH_2)$ .**

On définit trois fonctions  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\begin{cases} \tilde{H}(x, y) = \frac{H(x+y) - H(x-y)}{2y} & \text{si } y \neq 0 \\ \tilde{H}(x, 0) = H'(x) \\ \tilde{G}(x, y) = \frac{G(x+y) - G(x-y)}{2y} & \text{si } y \neq 0 \\ \tilde{G}(x, 0) = G'(x) \end{cases}$$

$$(1.3.4) \quad \tilde{F}(x, y) = \tilde{G}(x, y)\tilde{H}(x, y)$$

D'après (1.2.4), la fonction  $\tilde{F}$  vérifie :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x, y) = \tilde{F}(x, -y) \\ \tilde{F}(x, 0) = 1 \end{cases}$$

Il existe donc une fonction  $F_1$  de classe  $C^{p-2}$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$(1.3.5) \quad \sqrt{\tilde{F}(x, y)} = 1 + 2y^2 F_1(x, y).$$

Avec ces nouvelles notations, l'équation  $(RH_2)$  s'écrit :

$$(1.3.6) \quad [z+w]^2 = (1 + 2[z-w]^2 F_1(z_+ + z_- - w_+ - w_-, [z-w]))^2 [z-w]^2.$$

On remarque, en revenant au système (1.3.2), que  $[z+w]$  et  $[z-w]$  ont même signe car  $\sigma$  est négative. On peut donc écrire (1.3.6) en enlevant les carrés et on obtient après simplification :

$$(1.3.7) \quad [w] = F_1(z_+ + z_- - w_+ - w_-, [z-w]) [z-w]^3.$$

On suppose  $z_+$  et  $z_-$  connus et on prend  $w_- = 0$ .

**Lemme 1.3.2.**

Si  $[z]$  est assez petit et si  $w_-$  est nulle, l'équation (1.3.7) admet une unique solution  $w_+$  qui vérifie :

$$w_+ = W(z_+, z_-) [z]^3$$

où  $W$  est une fonction de classe  $C^{p-2}$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

*Preuve.*

On a supposé que  $w_- = 0$ , l'équation (1.3.7) s'écrit alors :

$$(1.3.8) \quad w_+ = F_1(z_+ + z_- - w_+, [z-w]) [z-w]^3.$$

On pose :

$$\begin{cases} x = \frac{w_+}{[z]^3} \\ G(z_+, z_-, x) = x - F_1(z_+ - x[z]^3 + z_-, [z - x[z]^3])(1 - x[z]^2)^3 \end{cases}$$

D'après (1.3.8), on a  $G(z_+, z_-, x) = 0$ . De plus,  $\partial_x G(z_+, z_-, x) = 1 + O([z]^2)$  donc, d'après le théorème des fonctions implicites, si le saut de  $z$  est assez petit, il existe une unique application  $W$  de classe  $C^{p-2}$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$x = W(z_+, z_-) \quad \square$$

*Remarque.* Ce résultat a été montré, dans un cadre plus général, par P.D Lax [8].

### 1.4 Le théorème.

#### 1.4.1 Les hypothèses.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(1.4.1) \quad \begin{cases} \partial_t w + H'(z-w)\partial_x w = 0 \\ \partial_t z - H'(z-w)\partial_x z = 0 \\ \begin{cases} w(0, x) = 0 \\ z(0, x) = z_0(x) \end{cases} \end{cases}$$

où  $H$  et  $z_0$  sont des fonctions de classe respectivement  $C^{p+1}$  et  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $p \geq 4$ . On suppose également que la fonction  $z_0$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . On pose :

$$(1.4.2) \quad g(x) = -H'(z_0(x))$$

et on fait les hypothèses suivantes :

Il existe  $y_0$  tel que :

$$(1.4.3) \quad \begin{cases} g^{(1)}(y_0) < 0 \\ g^{(2)}(y_0) = 0 \\ g^{(3)}(y_0) > 0 \end{cases}$$

On pose enfin :

$$(1.4.4) \quad \begin{cases} t_0 = -\frac{1}{g'(y_0)} \\ x_0 = y_0 + t_0 g(y_0) \\ \alpha = g(y_0) \end{cases}$$

#### 1.4.2 Le théorème.

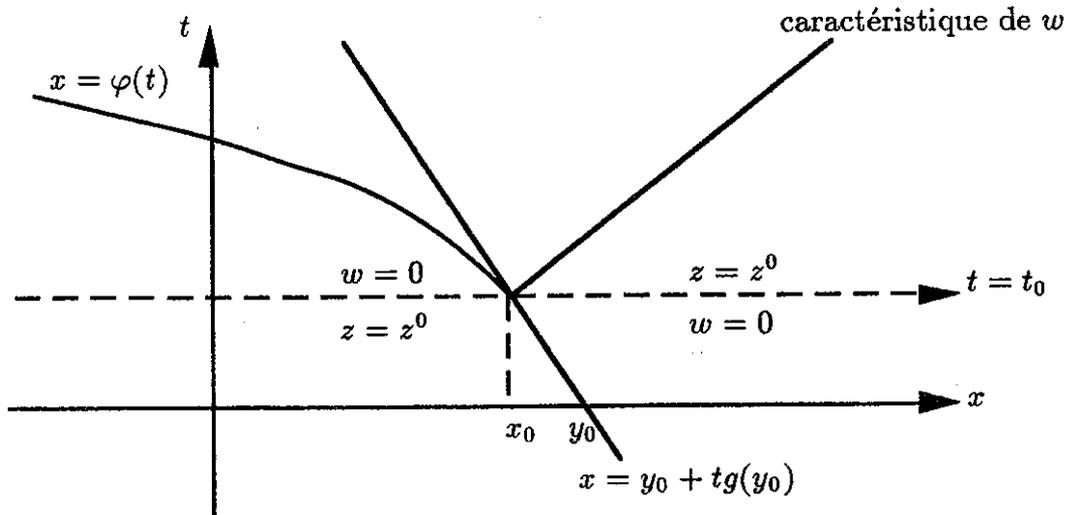


Figure 1.4.1

**THEOREME.**

Sous les hypothèses précédentes, le système (1.4.1) admet une solution faible qui présente un choc au point  $(t_0, x_0)$ . Cette solution est définie sur la réunion de  $\Omega_{t_0} = \{(t, x); t \in [0, t_0]\}$  et d'un voisinage du point  $(t_0, x_0)$  dans  $[t_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . La courbe de choc  $x = \varphi(t)$  est de classe  $C^1$  et les fonctions  $z$  et  $w$  sont continues à droite et à gauche de la courbe de choc. On a de plus les estimations suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(t) = x_0 + \alpha(t - t_0) + O((t - t_0)^2) \\ w(t, x) = O((t - t_0)^{\frac{3}{2}}) \\ z(t, x) = z_0(y_0) + O(((t - t_0)^3 + (x - x_0)^2)^{\frac{1}{6}}) \end{cases}$$

*Remarque.* Un changement affine des variables  $(t, x)$  permet de se ramener au cas où :

$$(1.4.5) \quad \begin{cases} g^{(2)}(y_0) = y_0 = 0 \\ g^{(1)}(y_0) = -1 \\ g^{(3)}(y_0) = 6 \\ t_0 = 0 \end{cases}$$

On prend alors les conditions initiales en  $t = -1$ .

Toute la suite de ce chapitre est consacrée à la démonstration de ce théorème. On va d'abord construire un schéma itératif pour travailler sur des équations linéarisées.

**2. Construction du schéma itératif****2.1 Linéarisation du système.**

On note  $x = \varphi(t)$  la courbe de choc que l'on cherche à calculer et on fait le changement de variables suivant :

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} y = x - \varphi(t) & \text{si } t \geq 0 \\ y = x - \alpha t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

On définit également :

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} \sigma = \varphi'(t) & \text{si } t \geq 0 \\ \sigma = \alpha & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Le changement de variables (2.1.1) permet de fixer la courbe de choc en  $y = 0$ . On note encore  $w$  et  $z$  les fonctions obtenues dans les variables  $t$  et  $y$ .

Elles sont solutions du système :

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} \begin{cases} \partial_t w(t, y) + \left( H'(z - w)(t, y) - \sigma(t) \right) \partial_y w(t, y) = 0 \\ \partial_t z(t, y) - \left( H'(z - w)(t, y) + \sigma(t) \right) \partial_y z(t, y) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} z(-1, y) = z_0(y) \\ w(-1, y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tous les résultats donnés sont locaux, on définit alors les ouverts suivants :

$$(2.1.4) \quad \begin{cases} \Omega_0 = \{(t, y); -1 \leq t \leq 0; -\varepsilon < y < \varepsilon\} \\ \Omega_+ = \{(t, y); 0 < t < \eta; 0 < y < \varepsilon - t\} \\ \Omega_- = \{(t, y); 0 < t < \eta; -\varepsilon + t < y < 0\} \\ \Omega = \Omega_0 \cup \overline{\Omega}_+ \cup \overline{\Omega}_- \end{cases}$$

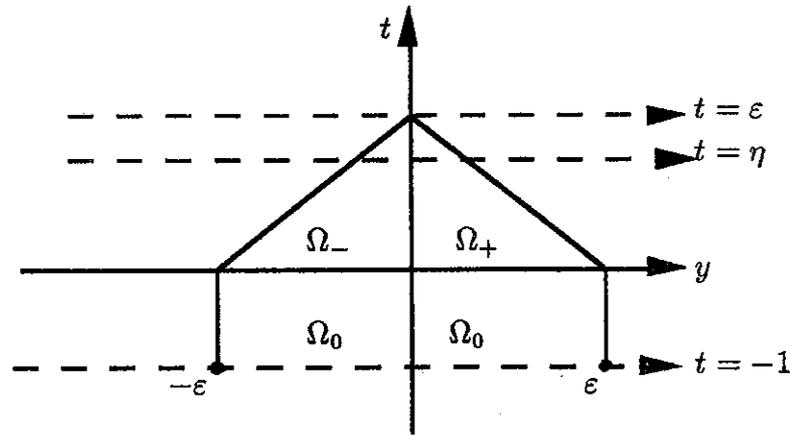


Figure 2.1.1

On linéarise alors en considérant les systèmes suivants :

$$(2.1.5) \quad \begin{cases} \partial_t z^{\nu+1} - \left( H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu \right) \partial_y z^{\nu+1} = 0 & \text{sur } \Omega \\ z^{\nu+1}(-1, y) = z_0(y) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(2.1.6) \quad \begin{cases} \partial_t w^{\nu+1} + \left( H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu \right) \partial_y w^{\nu+1} = 0 & \text{sur } \Omega \\ w^{\nu+1}(-1, y) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $z^\nu$  et  $w^\nu$  sont des fonctions supposées connues et  $\sigma^\nu$  est définie par :

$$(2.1.7) \quad \begin{cases} \sigma^\nu = -\sqrt{\frac{H(z^\nu - w^\nu)}{G(z^\nu - w^\nu)}} & \text{si } t \geq 0 \\ = \alpha & \text{si } 0 \geq t \geq -1 \end{cases}$$

La fonction nulle est solution de (2.1.6). Pour obtenir une autre solution, on se donnera  $w^{\nu+1}(t, 0^+)$  définie par :

$$(2.1.8) \quad w^{\nu+1}(t, 0^+) = w_+^{\nu+1} = W(z_+^{\nu+1}, z_-^{\nu+1}) [z^{\nu+1}]^3$$

et on verra qu'on obtient une solution non nulle. On va dans le prochain paragraphe définir les fonctions  $z^0$  et  $w^0$  qui initialisent le schéma.

## 2.2 Choix des premiers termes.

On prend pour  $w^0$  la fonction identiquement nulle sur  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $z^0$ , on choisit la solution obtenue dans le premier chapitre.

### 2.2.1 Choix de $z_0$ .

On prend pour  $z_0$  la solution entropique du problème de Cauchy suivant :

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} \partial_t z^0 - H'(z^0) \partial_x z^0 = 0 & \text{sur } \Omega \\ z^0(-1, x) = z_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

On rappelle qu'on a posé :

$$(1.4.4) \quad \begin{cases} g(x) = -H'(z_0(x)) \\ \alpha = g(0) \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :

$$(1.4.5) \quad \begin{cases} g^{(1)}(0) = -1 \\ g^{(2)}(0) = 0 \\ g^{(3)}(0) = 6 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation étudiée au premier chapitre où le temps a été translaté de  $-1$ . On sait donc que le système (2.2.1) admet une solution faible entropique qui présente un choc à l'instant  $t_0 = 0$  et au point  $x_0 = (t_0 + 1)g(0) = \alpha$ . De plus, la courbe de choc a pour équation  $x = \alpha(t + 1) + \varphi^0(t)$  où la fonction  $\varphi^0$  appartient à  $C^{\frac{p}{2}}([0, \eta]) \cap C^p(]0, \eta])$  et vérifie :

$$(2.2.2) \quad \varphi^0(t) = 0(t^2).$$

*Remarque.* Le résultat est local car on ne suppose plus que, pour tout  $y$  réel,  $yg''(y) > 0$ .

On pose :

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} \sigma^0(t) = (\varphi^0)'(t) + \alpha & \text{si } t \geq 0 \\ = \alpha & \text{si } 0 \geq t \geq -1 \end{cases}$$

La fonction  $\sigma^0$  est la solution de l'équation de Rankine-Hugoniot ; on a donc :

$$(2.2.4) \quad \sigma^0 = -\frac{[H(z^0)]}{[z^0]} \quad \text{si } t \geq 0.$$

On fait le changement de variables suivant :

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} y = x - \alpha(t+1) - \varphi_0(t) & \text{si } t \geq 0 \\ y = x - \alpha(t+1) & \text{si } 0 \geq t \geq -1 \end{cases}$$

qui redresse la courbe de choc en  $y = 0$ . On note encore  $z^0$  la solution de (2.2.1) dans les variables  $(t, y)$  ; elle vérifie l'équation suivante :

$$(2.2.6) \quad \begin{cases} \partial_t z^0 - (H'(z^0) + \sigma^0) \partial_y z^0 = 0 & \text{sur } \Omega \\ z^0(-1, x) = z_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

*Remarque.* La solution  $z^0$  est entropique et la fonction  $H''$  est strictement négative donc :

$$(2.2.7) \quad [z^0] < 0.$$

Le lemme 4.2.2 du premier chapitre, dans ces nouvelles variables, donne l'estimation suivante :

$$(2.2.8) \quad \begin{cases} z^0(t, y) - z^0(t_0, x_0) = O((t^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}) \\ \partial_y z^0(t, y) = O((t^3 + y^2)^{-\frac{1}{3}}) \\ \partial_y^2 z^0(t, y) = O((t^3 + y^2)^{-\frac{5}{6}}) \end{cases}$$

Pour résoudre les systèmes linéarisés, on va avoir besoin de résultats complémentaires sur  $z^0$ .

### 2.2.2 Etude des caractéristiques.

On a vu, dans le premier chapitre, que les caractéristiques de  $z^0$  existent et sont des droites dans les variables  $(t, x)$  d'équation  $x = y + (t+1)g(y)$  où  $t$  est remplacé par  $t+1$  car la condition initiale est prise en  $t = -1$  et où  $y$  est le pied de la caractéristique. On sait qu'elles sont de pente strictement négative sur  $\Omega_+$  car  $g(y)$  est strictement négatif pour tout  $y$  réel.

On se place sur  $\Omega_+$  et on considère la caractéristique du système (2.2.6) qui passe par le point  $(s, y)$  de  $\Omega_+$  et de point générique  $(t, \xi(t, s, y))$ . Elle est définie par l'équation intégrale suivante en tenant compte du changement de variables fait pour redresser le choc :

$$(2.2.9) \quad \xi(t, s, y) + \alpha(t+1) + \varphi^0(t) = \xi_0 + (t+1)g(\xi_0)$$

où on appelle  $\xi_0$  le pied de cette caractéristique qui est représentée sur la figure (2.2.1). On remarque que, pour  $\eta$  assez petit, la pente d'une caractéristique est de l'ordre de :

$$\frac{1}{g(\xi_0) - \alpha} = \frac{1}{g(\xi_0) - g(0)} = \frac{1}{\xi_0 g'(\theta \xi_0)} \text{ avec } \theta \in ]0, 1[.$$

On prend alors  $\varepsilon$  assez petit pour que cette pente soit inférieure à  $-1$  pour tout  $\xi_0 \in [0, \varepsilon]$ . La caractéristique de  $z^0$  de pied  $\xi_0 \in [0, \varepsilon]$  quitte alors le domaine  $\bar{\Omega}_+$  en  $y = 0$ .

L'égalité (2.2.9) appliquée à  $t = s$  donne :

$$y + \alpha(s+1) + \varphi^0(s) = \xi_0 + (s+1)g(\xi_0).$$

On prend  $0 \leq t \leq s$  et on fait la différence des deux égalités précédentes ; on obtient :

$$(2.2.10) \quad \begin{aligned} y - \xi(t, s, y) &= (g(\xi_0) - \alpha)(s-t) + \varphi^0(t) - \varphi^0(s) \\ &= (g(\xi_0) - g(0))(s-t) + O(s^2 - t^2) \\ &\quad \text{car } \varphi^0(t) = c't^2 + o(t^2) \text{ et } t \leq s \\ &= -\xi_0(s-t) + O(s(s-t) + \xi_0^3(s-t)) \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (1.4.5) faite sur la fonction  $g$ .

### Lemme 2.2.1.

La caractéristique  $t \rightarrow \xi(t, s, y)$  de  $z^0$  qui passe par le point  $(s, y)$  de  $\Omega_+$  vérifie pour  $s \geq t \geq 0$  :

$$\xi(t, s, y) - y = \sqrt{s}(s-t) + O(s(s-t) + y^{\frac{1}{3}}(s-t)).$$

*Preuve.*

On reprend la fonction  $y_+$  définie en (2.2.3) dans le premier chapitre mais calculée dans les nouvelles variables qui redressent le choc, ce qui nous permet d'écrire :

$$(2.2.11) \quad \xi_0 = y_+(s, y).$$

On va alors utiliser les estimations déjà démontrées sur cette fonction. L'inégalité (4.2.3) du premier chapitre nous donne :

$$\begin{aligned} 0 \leq y_+^3(s, y) &\leq c((s)^3 + (y + \alpha(s+1) + \varphi^0(s) - x_0)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(s^{\frac{3}{2}} + y + \alpha s + \varphi^0(s)). \end{aligned}$$

car  $x_0 = \alpha$ . On a donc :

$$\xi_0^3(s-t) = O(s(s-t) + y(s-t)).$$

car  $t \geq 0$  et  $\varphi^0(s) = O(s^2)$ . L'égalité (2.2.10) devient alors :

$$(2.2.12) \quad \xi(t, s, y) - y = \xi_0(s-t) + O(s(s-t)(1+y))$$

On a vu dans le lemme 4.1.1 du premier chapitre que :

$$(2.2.13) \quad y_+(s, 0) = \sqrt{s} + O(s).$$

Regardons alors le cas où  $y > 0$ . La fonction  $y_+$  est de classe  $C^p$  sur  $\overline{\Omega}_+ \setminus (0, 0)$ , on écrit alors la formule de Taylor :

$$y_+(s, y) = y_+(s, 0) + y \partial_y y_+(s, \theta y) \quad \text{avec } \theta \in ]0, 1[$$

or la fonction  $(\theta, s, y) \rightarrow y^{\frac{2}{3}} \partial_y y_+(s, \theta y)$  est uniformément bornée sur le compact  $[0, 1] \times \overline{\Omega}_+$ ; en effet, d'après l'identité (4.2.7) et l'inégalité (4.2.8) du premier chapitre, on a :

$$0 \leq y^{\frac{2}{3}} \partial_y y_+(s, \theta y) \leq C \frac{y^{\frac{2}{3}}}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{3}}} \leq C$$

donc  $\xi_0 = \sqrt{s} + O(s + y^{\frac{1}{3}})$ . On reporte cette égalité dans (2.2.12) et on obtient :

$$\xi(t, s, y) - y = \sqrt{s}(s-t) + O(s(s-t) + y^{\frac{1}{3}}(s-t) + y(s-t)).$$

On suppose alors  $\varepsilon$  assez petit pour avoir  $y < y^{\frac{1}{3}}$  et  $(s-t)^2 < s-t$ ; on a alors  $y(s-t)^2 < y^{\frac{1}{3}}(s-t)$  et on a démontré le lemme  $\square$

### 2.2.3 Calcul d'une certaine intégrale.

On considère la caractéristique définie en (2.2.9) et on pose :

$$I \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^s -(\partial_y H'(z^0))(t, \xi(t, s, y)) dt.$$

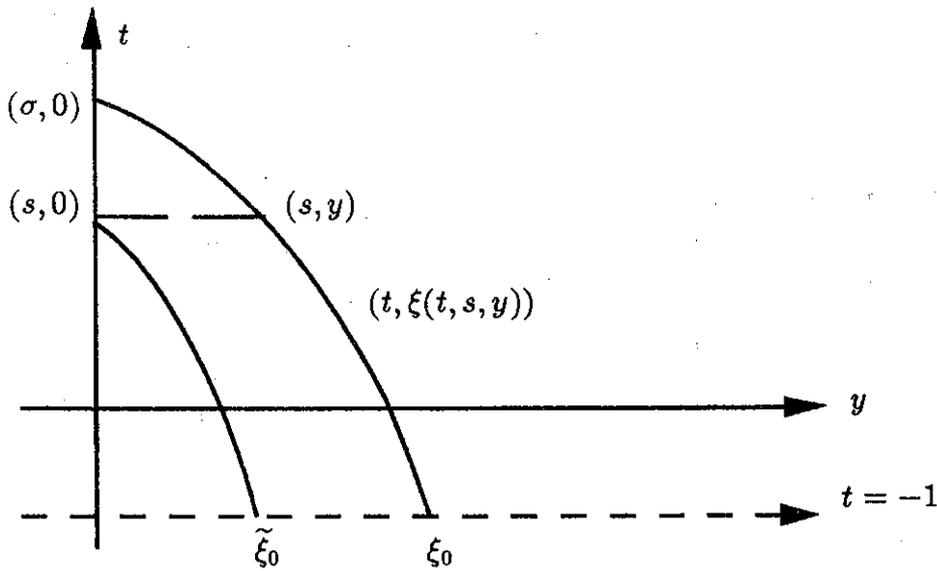


Figure 2.2.1

**Lemme 2.2.2.** Il existe  $c > 0$  telle que, pour  $s > 0$  et  $y \geq 0$  assez petits, on ait :

(1)

$$|I| \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) + c\sqrt{s}$$

(2)

$$I = - \int_0^s |(\partial_y H'(z^0))(t, \xi(t, s, y))| dt$$

*Preuve.*

$z^0$  étant constant le long d'une caractéristique, on a l'égalité suivante :

$$z^0(t, \xi(t, s, y)) = z^0(s, y) = z_0(\xi_0)$$

d'où, d'après (2.2.9) :

$$(2.2.14) \quad \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y)) = \frac{z'_0(\xi_0)}{1 + (t+1)g'(\xi_0)}$$

On en déduit alors que :

$$(2.2.15) \quad I = \int_0^s \frac{g'(\xi_0)}{1 + (t+1)g'(\xi_0)} dt = \ln\left(\frac{1 + (s+1)g'(\xi_0)}{1 + g'(\xi_0)}\right).$$

On a vu au premier chapitre que le pied d'une caractéristique  $\xi_0$  est une fonction croissante de la variable d'espace  $y$ . D'après les hypothèses (1.4.5), la fonction  $g'$  est croissante sur  $[0, \varepsilon]$ . On en déduit que la fonction :

$$y \rightarrow -\ln\left(\frac{1 + (1+s)g'(\xi_0)}{1 + g'(\xi_0)}\right)$$

est décroissante.

On considère alors la caractéristique de  $z^0$  qui passe par le point  $(s, 0)$  et on note  $\tilde{\xi}_0$  son pied ; on a alors d'après ce qui précède :

$$(2.2.16) \quad -\ln\left(\frac{1 + (1+s)g'(\xi_0)}{1 + g'(\xi_0)}\right) \leq -\ln\left(\frac{1 + (1+s)g'(\tilde{\xi}_0)}{1 + g'(\tilde{\xi}_0)}\right)$$

D'après le lemme 4.1.1 et la proposition 4.1.1 du premier chapitre donnant les régularités de la courbe de choc et du pied de la caractéristique,  $\tilde{\xi}_0$  est une fonction régulière de la variable  $\sqrt{s}$ , donc il existe une constante  $c_1$  telle que :

$$\tilde{\xi}_0 = \sqrt{s} + c_1 s + o(s).$$

On peut alors faire un développement limité des fonctions suivantes en utilisant l'hypothèse (1.4.5) faite sur la fonction  $g$  et ses dérivées :

$$\begin{aligned} 1 + g'(\tilde{\xi}_0) &= 1 + (-1 + 2g^{(3)}(0)\tilde{\xi}_0^2 + \tilde{O}(s^{\frac{3}{2}})) \\ &= 3s + \tilde{O}(s^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} 1 + (s+1)g'(\tilde{\xi}_0) &= 1 + (s+1)(-1 + 3s + \tilde{O}(s^{\frac{3}{2}})) \\ &= -s + 3s + \tilde{O}(s^{\frac{3}{2}}) \\ &= 2s + \tilde{O}(s^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

avec  $\tilde{O}$  défini par :

$$f = \tilde{O}(g) \Leftrightarrow \exists C > 0 \quad \frac{1}{C}g \leq f \leq Cg.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1 + (s+1)g'(\tilde{\xi}_0)}{1 + g'(\tilde{\xi}_0)}\right) &= \ln\left(\frac{2s + \tilde{O}(s^{\frac{3}{2}})}{3s + \tilde{O}(s^{\frac{3}{2}})}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{3}(1 + \tilde{O}(\sqrt{s}))\right) \end{aligned}$$

On obtient, alors, en reportant ce résultat dans (2.2.15) et en utilisant (2.2.16) :

$$(2.2.18) \quad -I \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) + c\sqrt{s}.$$

si  $s$  et  $y$  sont assez petits,  $\xi_0$  l'est aussi et pour  $\xi_0$  assez petit, on a  $g'(\xi_0) < 0$  et :

$$1 + (t+1)g'(\xi_0) > 1 + (s+1)g'(\xi_0) \text{ car } t \leq s$$

et  $1 + (s+1)g'(\xi_0) > 0$  d'après le calcul (2.2.17). On a alors  $I < 0$  et l'inégalité (2.2.18) prouve le premier point du lemme  $\square$

#### 2.2.4 Estimation de $\partial_y(H'(z^0))$ .

On considère la caractéristique définie en (2.2.9) et on se donne une fonction régulière  $(t, s, y) \rightarrow \zeta(t, s, y)$  vérifiant : il existe une constante  $R$  strictement positive telle que, pour tout  $(s, y) \in \overline{\Omega}_+$ , pour tout  $t \in [0, s]$ , on ait :

$$(2.2.19) \quad |\zeta(t, s, y) - \xi(t, s, y)| \leq R s (s - t).$$

#### Lemme 2.2.3.

Pour  $\varepsilon$  et  $\eta$ , définis en (2.1.4), assez petits, il existe une constante  $\tilde{C}$  ne dépendant que de  $R$  telle que, pour tout  $(s, y) \in \overline{\Omega}_+$  et  $t \in [0, s]$ , on ait :

$$|(\partial_y(H'(z^0)))(t, \zeta(t, s, y))| \leq (1 + \tilde{C}\sqrt{s}) |(\partial_y(H'(z^0)))(t, \xi(t, s, y))|.$$

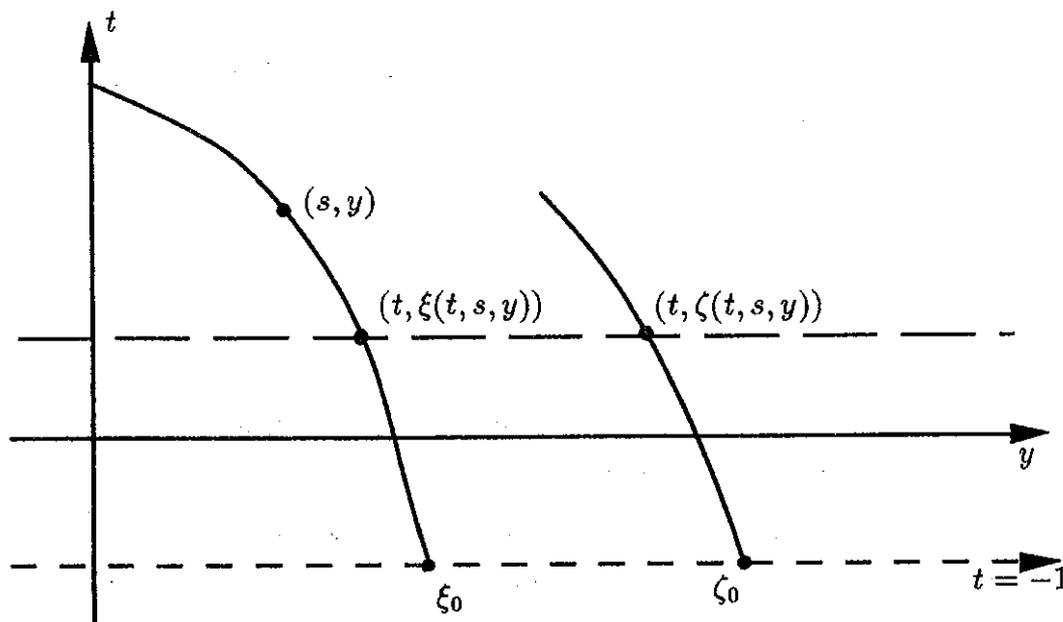


Figure 2.2.2

*Preuve.*

On note  $\xi_0$  (respectivement  $\zeta_0$ ) le pied de la caractéristique de  $z^0$  qui passe par  $(t, \xi(t, s, y))$  (resp.  $(t, \zeta(t, s, y))$ ). On utilise l'identité (2.2.14) pour

exprimer  $\partial_y(H'(z^0))$  en fonction du pied de la caractéristique; on fait le rapport des deux expressions obtenues et on a :

$$(2.2.20) \quad \left| \frac{\partial_y(H'(z^0))(t, \xi(t, s, y))}{\partial_y(H'(z^0))(t, \zeta(t, s, y))} \right| = \left| \frac{g'(\xi_0)}{g'(\zeta_0)} \right| \times \left| \frac{1 + (1+t)g'(\zeta_0)}{1 + (1+t)g'(\xi_0)} \right|.$$

Montrons que l'hypothèse (2.2.19) entraîne :

$$(2.2.21) \quad \xi_0 - \zeta_0 = O((s-t)) = O(s).$$

On reprend les équations sous forme intégrale des deux caractéristiques :

$$\begin{cases} \xi(t, s, y) + \alpha(t+1) + \varphi^0(t) = \xi_0 + (t+1)g(\xi_0) \\ \zeta(t, s, y) + \alpha(t+1) + \varphi^0(t) = \zeta_0 + (t+1)g(\zeta_0) \end{cases}$$

En faisant la différence, on obtient :

$$\begin{aligned} \xi_0 - \zeta_0 + (t+1)(g(\xi_0) - g(\zeta_0)) &= \xi(t, s, y) - \zeta(t, s, y) \\ &= (s-t)\psi(t, s, y) \end{aligned}$$

où  $\psi$  est une fonction bornée en  $t$  d'après l'hypothèse (2.2.19). On pose :

$$u(t) = \frac{\xi_0 - \zeta_0}{s-t}$$

pour  $\xi_0, s$  et  $y$  fixés. On a alors  $u(s) = 1$  et :

$$F(t, u) = u + (1+t) \left( \frac{g(\xi_0) - g(\xi_0 - (s-t)u)}{s-t} \right) - \psi(t, s, y) = 0.$$

On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites pour montrer que  $u$  est bornée en  $t$ . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \partial_u F(t, u) &= 1 + (1+t)g'(\xi_0 - (s-t)u) \\ &= 1 + (1+t)g'(\zeta_0) \end{aligned}$$

Donc  $\partial_u F(t, u) > 0$ , d'après (2.2.16) pour  $\xi_0$  et  $s$  assez petits. On a donc l'estimation (2.2.21) car  $s-t = O(s)$ .

Cette estimation nous donne immédiatement que :

$$(2.2.22) \quad \frac{g'(\zeta_0)}{g'(\xi_0)} = 1 + O((s))$$

De plus, on a :

$$\frac{1 + (t+1)g'(\zeta_0)}{1 + (t+1)g'(\xi_0)} = 1 + (t+1) \frac{g'(\zeta_0) - g'(\xi_0)}{1 + (t+1)g'(\xi_0)}.$$

On définit le temps  $\sigma$  par  $\xi(\sigma, s, y) = 0$  et on utilise le fait que  $\xi_0$  est une fonction régulière de la variable  $\sqrt{\sigma}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} 1 + (t+1)g'(\xi_0) &= -t + 3\sigma + \tilde{O}(\sigma^{\frac{3}{2}}) \\ &= \tilde{O}(\sigma) \text{ car } t \leq s \leq \sigma \text{ et} \\ g'(\zeta_0) - g'(\xi_0) &= (\zeta_0 - \xi_0)g''(\xi_0) + O(s^2) \text{ d'après (2.2.20)} \\ &= (\zeta_0 - \xi_0)\xi_0 g^{(3)}(0) + O(s^2 + \sigma^2) \\ &\quad \text{car } \xi_0 = O(\sqrt{\sigma}) \\ &= O(s\sqrt{\sigma}). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{g'(\zeta_0) - g'(\xi_0)}{1 + (t+1)g'(\xi_0)} &= \frac{O(s\sqrt{\sigma})}{\tilde{O}(\sigma)} \\ &= \frac{O(s)}{\tilde{O}(\sqrt{\sigma})} \\ &= O(\sqrt{s}) \text{ car } s \leq \sigma. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(2.2.23) \quad \frac{1 + tg'(\zeta_0)}{1 + tg'(\xi_0)} = 1 + O(\sqrt{s}).$$

Les estimations (2.2.22) et (2.2.23) prouvent alors le lemme  $\square$

### 2.3 Hypothèses de récurrence.

#### 2.3.1 Choix de $z^\nu$ .

On se donne une fonction  $z^\nu$  définie sur  $\Omega$  et vérifiant les conditions suivantes :

- (1)  $z^\nu = z^0$  sur  $\Omega_0 \cup \bar{\Omega}_-$ .
- (2)  $z^\nu \in C^1(\bar{\Omega}_+ \setminus (0,0))$ .
- (3) Il existe deux constantes  $M$  et  $M'$  strictement positives telles que, pour tout  $(t, y) \in \bar{\Omega}_+$ , on ait :

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} |z^\nu(t, y) - z^0(t, y)| \leq Mt \\ |\partial_y(z^\nu - z^0)(t, y)| \leq \frac{M'}{(t^3 + y^2)^{\frac{1}{8}}} \end{cases} \text{ pour } (t, y) \neq (0,0).$$

#### 2.3.2 Choix de $w^\nu$ .

On se donne une fonction  $w^\nu$  définie sur  $\Omega$  et vérifiant les conditions suivantes :

- (1)  $w^\nu = 0$  sur  $\Omega_0 \cup \bar{\Omega}_-$ .

(2)  $w^\nu \in C^1(\overline{\Omega}_+ \setminus (0, 0))$ .

(3) Il existe deux constantes  $N$  et  $N'$  strictement positives telles que, pour tout  $(t, y) \in \overline{\Omega}_+$ , on ait :

$$(2.3.2) \quad \begin{cases} |w^\nu(t, y)| \leq N t^{\frac{3}{2}} \\ |\partial_y w^\nu(t, y)| \leq N' \sqrt{t}. \end{cases}$$

Avant d'étudier les systèmes linéarisés, on va donner également une estimation de  $\sigma^\nu - \sigma^0$ .

#### 2.4 Estimation de $\sigma^\nu - \sigma^0$ .

On rappelle qu'on a :

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} \sigma^0 = -\frac{[H(z^0)]}{[z^0]} \\ \sigma^\nu = -\sqrt{\frac{[H(z^\nu - w^\nu)]}{[G(z^\nu - w^\nu)]}} \end{cases}$$

On note  $z_-^0(t) = z_-^0 = z^0(t, 0^-)$ . On fait un développement limité de  $H$  en  $z_-^0$  :

$$\begin{aligned} [H(z^0)] &= [z^0]H'(z_-^0) + \frac{1}{2}[z^0]^2H''(z_-^0) \\ &\quad + \frac{1}{6}[z^0]^3H^{(3)}(z_-^0) + O([z^0]^4). \end{aligned}$$

D'après l'estimation (2.2.7), il existe une constante  $C_0$  strictement positive telle que :

$$(2.4.2) \quad |[z^0]| \leq C_0 \sqrt{t}$$

On a donc :

$$(2.4.3) \quad \sigma^0 = -H'(z_-^0) - \frac{1}{2}[z^0]H''(z_-^0) - \frac{1}{6}[z^0]^2H^{(3)}(z_-^0) + O(t^{\frac{3}{2}}).$$

On utilise le lemme 1.3.1 pour obtenir un développement limité de  $\sigma^\nu$  et on remarque que  $z_-^\nu = z_-^0$  et  $w_-^\nu = 0$  d'après le choix de ces fonctions donc :

$$\begin{aligned} \sigma^\nu &= -H'(z_-^0) - \frac{1}{2}[z^\nu - w^\nu]H''(z_-^0) - \frac{1}{6}[z^\nu - w^\nu]^2H^{(3)}(z_-^0) \\ &\quad - \frac{1}{24}[z^\nu - w^\nu]^2H''(z_-^0)G''(z_-^0)H'(z_-^0) + O([z^\nu - w^\nu]^3). \end{aligned}$$

Or on a supposé :

$$\begin{aligned} |(z^\nu - z^0)(t, y)| &\leq M t \\ |w^\nu(t, y)| &\leq N t^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} \sigma^\nu - \sigma^0 = -\frac{1}{2}[z^\nu - z^0]H''(z_-^0) - \frac{1}{6}([z^\nu]^2 - [z^0]^2)H^{(3)}(z_-^0) \\ \quad - \frac{1}{24}[z^\nu]^2H''(z_-^0)G''(z_-^0)H'(z_-^0) + O(t^{\frac{3}{2}}). \end{cases}$$

De plus :  $[z^\nu]^2 - [z^0]^2 = [z^\nu - z^0][z^0] = O(t^{\frac{3}{2}})$ . On a donc montré :

**Lemme 2.4.1.**

(1) Il existe une constante  $D = D(M, N)$  dépendant continûment de  $M$  et  $N$  telle que :

$$|\sigma^\nu - \sigma^0 + \frac{1}{2}[z^\nu - z^0]H''(z_-^0) + \frac{1}{24}[z^0]^2 H''(z_-^0)G''(z_-^0)H'(z_-^0)| \leq Dt^{\frac{3}{2}}$$

(2) Il existe  $\eta > 0$  tel que la fonction  $\sigma^\nu$  soit de classe  $C^1$  sur  $[0, \eta[$ .

*Preuve.*

Le deuxième point est évident d'après la régularité des fonctions  $z^\nu$  et  $w^\nu$   $\square$

On pose :

$$C_- = \text{Max}_{t \in [1, 1+\eta]} \left\{ |H''(z_-^0)| ; |H''(z_-^0)G''(z_-^0)H'(z_-^0)| \right\}.$$

**Lemme 2.4.2.**

Il existe  $\eta > 0$  tel que, pour toutes les fonctions  $z_\nu$  et  $w_\nu$  vérifiant les hypothèses du paragraphe 2.3, on ait l'estimation suivante, pour tout  $t \in [0, \eta[$  :

$$|\sigma^\nu - \sigma^0| \leq Pt$$

avec  $P = (M + \frac{1}{12}(C_0)^2)C_-$  où  $C_0$  a été défini en (2.4.2).

*Preuve.*

En effet, d'après le lemme précédent et la notation (2.4.2), on a :

$$\begin{aligned} |\sigma^\nu - \sigma^0| &\leq \left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{24}(C_0)^2\right)C_- t + Dt^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{P}{2}t + Dt^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

On prend  $\eta$  assez petit pour avoir  $D\sqrt{t} \leq \frac{P}{2}$  pour tout  $0 \leq t < \eta$  et on obtient le résultat  $\square$

On va maintenant résoudre les deux systèmes linéarisés.

**3. Calcul de  $z^{\nu+1}$** 

On veut résoudre le système suivant :

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t z^{\nu+1} - (H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu) \partial_y z^{\nu+1} = 0 \\ z^{\nu+1}(-1, y) = z_0(y) \end{cases}$$

### 3.1 Résolution sur $\Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-$ .

D'après les hypothèses (2.3.1) et (2.3.2) faites sur les fonctions  $z^\nu, w^\nu$  et  $\sigma^\nu$ , le système (3.1.1) s'écrit sur  $\Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-$  sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t z^{\nu+1} - (H'(z^0) + \alpha) \partial_y z^{\nu+1} = 0 \\ z^{\nu+1}(-1, y) = z_0(y) \end{cases}$$

$z^0$  est solution de cette équation, on peut donc prendre :

$$(3.1.1) \quad z^{\nu+1} = z^0 \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-$$

### 3.2 Résolution sur $\overline{\Omega}_+$ .

#### 3.2.1 Étude des caractéristiques.

On va d'abord montrer l'existence et l'unicité des caractéristiques. On se fixe  $s$  et  $y$  positifs. La caractéristique  $t \rightarrow \xi^{\nu+1}(t, s, y)$  de  $z^{\nu+1}$  qui passe par  $(s, y)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi^{\nu+1}}{\partial t}(t, s, y) = -H'(z^\nu - w^\nu)(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) - \sigma^\nu \\ \xi^{\nu+1}(s, s, y) = y \end{cases}$$

or la fonction  $F$  définie par :

$$F : \begin{cases} \overline{\Omega}_+ \setminus \{t = 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) \rightarrow -H'(z^\nu - w^\nu)(t, y) - \sigma^\nu(t) \end{cases}$$

est de classe  $C^1$  donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité d'une solution maximale  $\xi^{\nu+1}$  de classe  $C^1$ .

L'existence des caractéristiques ne nous permet a priori pas de déterminer  $z^{\nu+1}$  ; il faut également montrer qu'elles sortent de  $\Omega_+$  par le côté  $t = 0$ . On va donc donner une estimation plus précise des caractéristiques de  $z^{\nu+1}$ .

#### 3.2.2 Estimation de $\xi^{\nu+1} - \xi^0$ .

On note  $t \rightarrow \xi^{\nu+1}(t, s, y)$  (respectivement  $\xi^0(t, s, y)$ ) la caractéristique de  $z^{\nu+1}$  (resp.  $z^0$ ) qui passe par le point  $(s, y)$  de  $\overline{\Omega}_+$ .

#### Lemme 3.2.2.

Si  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont assez petits alors il existe une constante  $R$  strictement positive dépendant de  $M, N$  et  $P$  définis précédemment telle que, pour tout  $s$  strictement positif et pour tout  $t$  de  $[0, s]$ , on ait :

$$|\xi^{\nu+1}(t, s, y) - \xi^0(t, s, y)| \leq R s (s - t).$$

*Preuve.*

$\xi^0$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(3.2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi^0}{\partial t}(t, s, y) = -H'(z^0)(t, \xi^0(t, s, y)) - \sigma^0(t) \\ \xi^0(s, s, y) = y \end{cases}$$

et  $\xi^{\nu+1}$  est solution de l'équation différentielle (3.2.1).

On considère le schéma suivant :

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} y - \xi_{n+1}(t, s, y) = - \int_t^s (H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y)) + \sigma^\nu(\alpha)) d\alpha \\ \xi_0(t, s, y) = \xi^0(t, s, y) \end{cases}$$

On note :

$$(3.2.5) \quad C_2 = \text{Max}_{x \in \bar{\Omega}; \theta \in [0,1]} |H''(z^0(x) + \theta(z^\nu - z^0 - w^\nu)(x))|.$$

et on suppose que pour,  $n \geq 0$ , on a :

$$(H.R.) \quad |\xi_n(t, s, y) - \xi_0(t, s, y)| \leq R s (s - t)$$

avec

$$(3.2.6) \quad R = 3(P + C_2 M).$$

En intégrant l'équation (3.2.3) et en retranchant le résultat obtenu à (3.2.4), on obtient que :

$$\begin{aligned} |\xi_{n+1}(t, s, y) - \xi_0(t, s, y)| &\leq \int_t^s |\sigma^\nu(\alpha) - \sigma^0(\alpha)| \\ &+ |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y)) - H'(z^0)(\alpha, \xi_0(\alpha, s, y))| d\alpha. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.4.2, on peut majorer le premier terme de la manière suivante :

$$\int_t^s |\sigma^\nu(\alpha) - \sigma^0(\alpha)| d\alpha \leq \int_t^s P \alpha d\alpha \leq P s (s - t).$$

Pour majorer le deuxième terme, on utilise une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \int_t^s |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y)) - H'(z^0)(\alpha, \xi_0(\alpha, s, y))| d\alpha &\leq \\ \int_t^s |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y)) - H'(z^0)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y))| d\alpha &+ \\ + \int_t^s |H'(z^0)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y)) - H'(z^0)(\alpha, \xi_0(\alpha, s, y))| d\alpha & \end{aligned}$$

Les hypothèses (2.3.1) et (2.3.2) et la formule de Taylor permettent d'obtenir la majoration suivante où  $C_2$  a été défini en (3.2.5) :

$$\begin{aligned} & \int_t^s |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, x)) - H'(z^0)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, x))| d\alpha \\ & \leq \int_t^s |(z^\nu - z^0 - w^\nu)H''(z^0 + \theta(z^\nu - z^0 - w^\nu))(\alpha, \xi_n(\alpha, s, x))| d\alpha \\ & \leq C_2(Ms + Ns^{\frac{3}{2}}) \int_t^s d\alpha \\ & \text{d'après les hypothèses faites sur } z^\nu - z^0 \text{ et } w^\nu \\ & \leq C_2(M + N\sqrt{s})s(s-t) \end{aligned}$$

On utilise également la formule de Taylor-Lagrange sur le terme restant et on a alors :

$$\begin{aligned} & \int_t^s |H'(z^0)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y)) - H'(z^0)(\alpha, \xi_0(\alpha, s, y))| d\alpha \\ & = \int_t^s |(\xi_n - \xi_0) \partial_y(H'(z^0))(\alpha, (\xi_0 + \theta(\xi_n - \xi_0))(\alpha, s, y))| d\alpha \\ & \leq R(1 + \tilde{C}\sqrt{s})s(s-t) \int_t^s |\partial_y(H'(z^0))(\alpha, \xi_0(\alpha, s, y))| d\alpha \\ & \text{d'après le lemme 2.2.3 et l'hypothèse de récurrence} \\ & \leq \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + c\sqrt{s}\right) R(1 + \tilde{C}\sqrt{s})s(s-t) \\ & \text{d'après le lemme 2.2.2 et pour } s \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

On obtient donc en regroupant les trois inégalités précédentes :

$$\begin{aligned} & |\xi_{n+1}(t, s, y) - \xi_0(t, s, y)| \\ & \leq \left(P + C_2(M + N\sqrt{s}) + R \ln\left(\frac{3}{2}\right) (1 + \tilde{C}\sqrt{s}) \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + c\sqrt{s}\right)\right) s(s-t) \\ & \leq \left(\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) R s(s-t) + C s^{\frac{3}{2}}(s-t) \\ & \leq \frac{5}{6} R s(s-t) + C s^{\frac{3}{2}}(s-t) \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $s$ . On a également utilisé le fait que  $\ln(3/2) < 1/2$ . On prend donc  $s$  assez petit et on a démontré l'hypothèse de récurrence.

On va maintenant montrer que la suite  $(\xi_n)_n$  converge vers la fonction  $\xi^{\nu+1}$  solution de l'équation différentielle (3.2.1) en vérifiant que cette suite

est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned}
& |\xi_{n+1}(t, s, y) - \xi_n(t, s, y)| \\
&= \int_t^s |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha, s, y)) - H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_{n-1}(\alpha, s, y))| d\alpha \\
&\leq \int_t^s |(\xi_n - \xi_{n-1}) \partial_y (H'(z^\nu - w^\nu))(\alpha, (\xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))(\alpha, s, y))| d\alpha \\
&\leq \|\xi_n - \xi_{n-1}\|_{L^\infty(0, s)} \int_0^s |\partial_y (H'(z^\nu - w^\nu))(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))| d\alpha
\end{aligned}$$

On majore l'intégrale en utilisant des inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned}
& \int_0^s |\partial_y (H'(z^\nu - w^\nu))(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))| d\alpha \leq \\
& \int_0^s |(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)) \partial_y (z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))| d\alpha \\
& + \int_0^s |H''(z^0) \partial_y (z^\nu - z^0 - w^\nu)(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))| d\alpha \\
& + \int_0^s |H''(z^0) \partial_y z^0(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))| d\alpha
\end{aligned}$$

Pour majorer la première intégrale, on utilise la formule de Taylor sur le terme  $H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)$  et on sait que :

$$\begin{cases} (z^\nu - z^0 - w^\nu)(s, y) = O(s) \\ \partial_y (z^\nu - w^\nu)(s, y) = O\left(\frac{1}{s}\right). \end{cases}$$

Elle se majore donc par  $C_1 s$ .

Pour la deuxième, on a supposé que :

$$\partial_y (z^\nu - z^0 - w^\nu)(s, y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

donc elle se majore, après intégration, par  $C_2 \sqrt{s}$ .

Pour majorer la troisième, on va utiliser les lemmes 2.2.2 et 2.2.3. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
|\xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}) - \xi_0| &= |(1 - \theta)(\xi_{n-1} - \xi_0) + \theta(\xi_n - \xi_0)| \\
&\leq (1 - \theta)|\xi_{n-1} - \xi_0| + \theta|\xi_n - \xi_0|
\end{aligned}$$

car  $\theta \in ]0, 1[$

$$\leq (1 - \theta + \theta) R s (s - t)$$

d'après l'hypothèse de récurrence que l'on a démontré

$$\leq R s (s - t)$$

On peut donc appliquer le lemme 2.2.3 car  $\xi_0$  est une caractéristique de  $z^0$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^s |(\partial H'(z^0))(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))| d\alpha \\ & \leq (1 + \tilde{C} \sqrt{s}) \int_0^s |(\partial H'(z^0))(\alpha, \xi_0(\alpha, s, y))| d\alpha \\ & \leq (\ln(\frac{3}{2}) + c \sqrt{s})(1 + \tilde{C} \sqrt{s}) \\ & \text{d'après le lemme 2.2.2} \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \int_0^s |\partial_y(H'(z^\nu - w^\nu))(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))| d\alpha \\ & \leq C_2 \sqrt{s} + C_1 s + (\ln(\frac{3}{2}) + c \sqrt{s})(1 + \tilde{C} \sqrt{s}) \\ & \leq \ln(\frac{3}{2}) + C \sqrt{s} \\ & \leq \frac{1}{2} \quad \text{si } s \text{ est assez petit.} \end{aligned}$$

La suite  $(\xi_n)_n$  vérifie donc :

$$\begin{aligned} \|\xi_{n+1} - \xi_n\|_{L^\infty(0,s)} & \leq \frac{1}{2} \|\xi_n - \xi_{n-1}\|_{L^\infty(0,s)} \\ & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\xi_1 - \xi_0\|_{L^\infty(0,s)} \end{aligned}$$

Il est alors facile de montrer que  $(\xi_n)_n$  est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers une fonction  $\xi$  qui vérifie (3.2.4) or  $\xi^{\nu+1}$  est l'unique solution de cette équation et on a donc :

$$|\xi^{\nu+1}(t, s, y) - \xi^0(t, s, y)| \leq R s (s - t) \quad \square$$

On déduit de cette estimation que, si  $\varepsilon$  est assez petit, la pente d'une caractéristique de  $z^{\nu+1}$  est du signe de celle de l'équation scalaire au voisinage du choc, donc négative ; elle est, de plus, strictement inférieure à  $-1$ .

La caractéristique de  $z^{\nu+1}$  qui passe par le point  $(s, y)$  de  $\bar{\Omega}_+ \setminus \{t = 0\}$  ressort donc par le côté  $t = 0$  et on peut entièrement définir  $z^{\nu+1}$  sur  $\Omega_+$  en posant :

$$(3.2.7) \quad z^{\nu+1}(s, y) = z^0(0, \xi^{\nu+1}(0, s, y)).$$

On remarque que l'on a également :

$$(3.2.8) \quad z^{\nu+1} \in C^1\left(\bar{\Omega}_+ \setminus (1, 0)\right).$$

### 3.2.3 Estimation de $z^{\nu+1} - z^0$ .

On rappelle qu'on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |(z^\nu - z^0)(s, y)| &\leq M s \\ |w^\nu(s, y)| &\leq N s^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

On pose  $v(s, y) = (z^{\nu+1} - z^0)(s, y)$  et  $v$  est alors solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(3.2.9) \quad \begin{cases} \partial_t v - (H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu) \partial_y v = \\ \quad \quad \quad (H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0) \partial_y z^0 \\ v(0, y) = 0 \end{cases}$$

On intègre le long d'une caractéristique  $t \rightarrow \xi^{\nu+1}(t, s, y)$  de  $z^{\nu+1}$  et on obtient que :

$$(3.2.10) \quad v(s, y) = \int_0^s (H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt.$$

On pose :

$$C^0 = \sup_{t \in [0, \eta]} \left| (H' H'' G'')(z_-^0(t)) \right| (C_0)^3$$

où  $C_0$  a été défini en (2.4.2) et on suppose que la constante  $M$  définie en (2.3.1) vérifie :

$$(3.2.11) \quad M \geq 10 C^0.$$

### Proposition 3.2.3.

Il existe  $\eta$  strictement positif tel que , pour tout  $(s, y) \in \bar{\Omega}_+$ , on ait :

$$|(z^{\nu+1} - z^0)(s, y)| \leq M s.$$

On va décomposer la preuve de cette proposition en montrant que :

### Lemme 3.2.4.

Il existe une constante  $C$  strictement positive dépendant continûment de  $M, N$  et  $R$  définis précédemment telle que :

(1)

$$\left| \int_0^s (H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0)) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt \right| \leq M s \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(s^{\frac{3}{2}}).$$

(2)

$$\left| \int_0^s (\sigma^\nu - \sigma^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt \right| \leq \left(\frac{1}{2} M \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C^0\right) s + C s^{\frac{3}{2}}.$$

La formule (3.2.10) nous donne alors :

**Lemme 3.2.5.**

Il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $(s, y) \in \Omega_+$ , on ait :

$$|(z^{\nu+1} - z^0)(s, y)| \leq \frac{3}{4} M s + C s^{\frac{3}{2}}.$$

*Preuve du lemme 3.2.4.*

Pour montrer le premier point, on utilise la formule de Taylor-Lagrange, il existe donc  $\theta \in ]0, 1[$  tel que :

$$\begin{aligned} & \int_0^s (H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0)) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt = \\ & \int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0) H''(z^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt \\ & + \int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0)^2 H^{(3)}(z^0 + \theta(z^\nu - w^\nu - z^0)) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt. \end{aligned}$$

Le deuxième terme se majore simplement en utilisant les estimations faites sur les fonctions  $z^\nu - z^0$  et  $w^\nu$  et la majoration de  $\partial_y z^0$  par  $1/t$  :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0)^2 H^{(3)}(z^0 + \theta(z^\nu - w^\nu - z^0)) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt \right| \\ & \leq C s^2 \end{aligned}$$

où  $C$  est un majorant de  $H^{(3)}(z^0 + \theta(z^\nu - w^\nu - z^0))$  sur  $\Omega$ . Il dépend donc continûment de  $M$  et  $N$ .

Pour majorer le terme restant, on utilise d'abord les lemmes 2.2.3 et 3.2.1 ainsi que les majorations de  $z^\nu - z^0$  et  $w^\nu$  par  $M t$  et  $N t^{\frac{3}{2}}$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0) H''(z^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt \right| \\ & \leq (1 + \tilde{C} \sqrt{s}) (M + N \sqrt{s}) s \int_t^s |\partial_y (H'(z^0))(t, \xi^0(t, s, y))| dt \end{aligned}$$

car  $|(\xi^{\nu+1} - \xi^0)(t, s, y)| \leq R s (s - t)$ . Le lemme 2.2.1 nous permet de majorer l'intégrale restante par  $\ln(\frac{3}{2}) + c\sqrt{s}$  et on obtient alors qu'il existe une constante  $C$  dépendant continûment de  $M, N$  et  $R$  (car  $\tilde{C}$  dépend de  $R$ ) telle que le premier point du lemme 3.2.4 soit vrai.

Pour prouver le deuxième point, on reprend le développement limité de  $\sigma^\nu - \sigma^0$  qui nous est donné par le lemme 2.4.1 et on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s (\sigma^\nu - \sigma^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^s |[z^\nu - z^0] H''(z_-^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y))| dt \\ & + \frac{1}{24} \int_0^s |[z^0]^2 (H'' G'' H')(z_-^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y))| dt + D C_0 s^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme se majore par :

$$\int_0^s | [z^0]^2 (H'' G'' H')(z_-^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) | dt \leq C^0 s$$

car  $[z^0](t) = O(\sqrt{t})$  et  $\partial_y z^0(t, y) = O(1/t)$ . Pour l'autre terme, on se sert encore des lemmes 2.2.3, 3.2.1 et 2.2.1 ; par un calcul similaire à celui fait dans la première partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^s | [z^\nu - z^0] H''(z_-^0) \partial_y z^0(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) | dt \\ \leq M(1 + \tilde{C}\sqrt{s}) s \left( \ln\left(\frac{3}{2}\right) + c\sqrt{s} \right) + C s^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

On regroupe ces deux résultats et on a prouvé le lemme 3.2.4 en utilisant  $\ln(3/2) < 1/2$ . Le lemme 3.2.3 est une conséquence de ce lemme appliqué à l'égalité (3.2.10) en utilisant l'hypothèse (3.2.11)  $\square$

#### 4. Calcul de $w^{\nu+1}$

On veut résoudre le système suivant :

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t w^{\nu+1} + (H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu) \partial_y w^{\nu+1} = 0 \\ w^{\nu+1}(-1, y) = 0 \end{cases}$$

##### 4.1 Résolution sur $\Omega_0 \cup \bar{\Omega}_-$ .

D'après les hypothèses (2.3.1) et (2.3.2) faites sur les fonctions  $z^\nu, w^\nu$  et  $\sigma^\nu$ , le système (4.1.1) s'écrit sur  $\Omega_0 \cup \bar{\Omega}_-$  sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t w^{\nu+1} + (H'(z^0) - \alpha) \partial_y w^{\nu+1} = 0 \\ w^{\nu+1}(0, y) = 0 \end{cases}$$

La fonction nulle est solution de cette équation, on peut donc prendre :

$$(4.1.2) \quad w^{\nu+1} = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \cup \bar{\Omega}_-.$$

##### 4.2 Résolution sur $\bar{\Omega}_+$ .

###### 4.2.1 Etude des caractéristiques.

On se fixe  $s$  et  $x$  positifs. La caractéristique  $t \rightarrow \xi^{\nu+1}(t, s, y)$  de  $w^{\nu+1}$  qui passe par  $(s, y)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi^{\nu+1}}{\partial t}(t, s, y) = H'(z^\nu - w^\nu)(t, \xi^{\nu+1}(t, s, y)) - \sigma^\nu(t) \\ \xi^{\nu+1}(s, s, y) = y \end{cases}$$

or  $H'$  est une fonction strictement positive ainsi que la fonction  $-\sigma^\nu$  donc les caractéristiques, si elles existent, sont de pente strictement positive.

La fonction  $F$  définie par :

$$F : \begin{cases} \bar{\Omega}_+ \setminus (0,0) \rightarrow \mathbb{R} \\ (t,y) \rightarrow H'(z^\nu - w^\nu)(t,y) - \sigma^\nu(t) \end{cases}$$

est de classe  $C^1$  donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité d'une solution maximale  $\xi^{\nu+1}$  de classe  $C^1$ .

Pour définir une solution de (4.1.1) sur  $\bar{\Omega}_+$ , on doit donc se donner une valeur  $w_+^{\nu+1}(t)$ . On prend la solution de la deuxième équation de Rankine-Hugoniot et on a vu dans le lemme 1.3.2 que l'on a :

$$w_+^{\nu+1} = W(z_-^{\nu+1}, z_+^{\nu+1}) [z^{\nu+1}]^3.$$

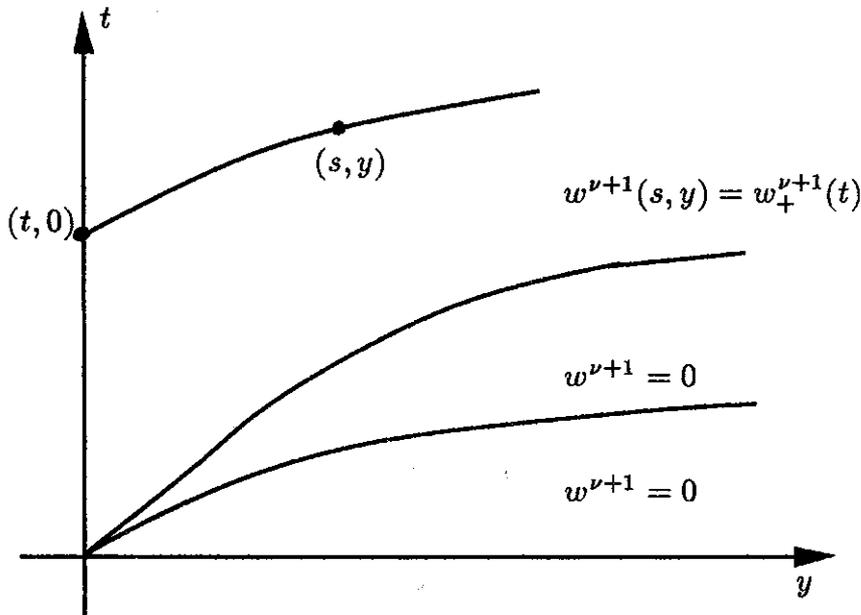


Figure 4.2.1

On définit  $w^{\nu+1}$  solution de (4.1.1) par :

$$(4.2.2) \quad w^{\nu+1}(s, y) = w_+^{\nu+1}(t)$$

où  $(t, 0)$  et  $(s, y)$  appartiennent à la même caractéristique. On remarque que l'on a bien :

$$(4.2.3) \quad w^{\nu+1} \in C^1(\bar{\Omega}_+ \setminus (0,0)).$$

4.2.2 Estimation de  $w^{\nu+1}$ .

On pose :

$$W_0 = W_0(M) = \sup_{t \in [0, \eta]} |W(z_-^{\nu+1}(t), z_+^{\nu+1}(t))|.$$

Cette constante  $W_0$  dépend de la constante  $M$  utilisée dans le lemme 3.2.1. On suppose que la constante  $N$  définie en (2.3.2) vérifie :

$$(4.2.4) \quad N \geq 2(C_0)^3 W_0(M).$$

**Lemme 4.2.1.**

Il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  assez petits tels que, pour tout  $(s, y) \in \overline{\Omega}_+$ , on ait :

$$|w^{\nu+1}(s, y)| \leq N s^{\frac{3}{2}}.$$

*Preuve.*

On reprend l'expression (4.2.2) et on a :

$$\begin{aligned} |w^{\nu+1}(t, \xi^{\nu+1}(t, s, 0))| &\leq W_0 | [z^{\nu+1}] |^3 \\ &\leq W_0 (C_0)^3 (1 + M\sqrt{s}) s^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Or on a vu que les caractéristiques étaient de pente strictement positive donc  $s \leq t$  et on a démontré le lemme d'après (4.2.4)  $\square$

Les lemmes 4.2.1 et 4.2.2 ont donc montré qu'on avait des estimations uniformes sur les suites de fonctions  $(z^\nu)_\nu$  et  $(w^\nu)_\nu$ .

**Proposition 4.2.2.**

Si  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont assez petits, alors il existe deux constantes  $M$  et  $N$  strictement positives telles que, pour tout  $\nu$  entier et pour tout  $(s, y)$  dans  $\Omega$ , on ait :

$$\begin{aligned} |(z^\nu - z^0)(s, y)| &\leq M s \\ |w^\nu(s, y)| &\leq N s^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

On va également montrer qu'on a des estimations uniformes sur les dérivées partielles.

**5. Estimation uniforme des dérivées partielles**

Le but de ce paragraphe est de montrer les estimations suivantes.

**Proposition 5.1.1.**

Si  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont assez petits, alors il existe deux constantes  $M'$  et  $N'$  strictement positives telles que, pour tout  $\nu$  entier et pour tout  $(s, y)$  dans  $\overline{\Omega}_+ \setminus (0, 0)$ , on ait :

$$\begin{aligned} |\partial_y(z^\nu - z^0)(s, y)| &\leq \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} \\ |\partial_y w^\nu(s, y)| &\leq N' \sqrt{s} \end{aligned}$$

### 5.1 Estimation des dérivées partielles de $z^{\nu+1}$ .

#### 5.1.1 Estimation de $\partial_y(z^\nu - z^0)$ .

On va d'abord donner trois lemmes techniques qui seront démontrés dans un paragraphe ultérieur. On note  $t \rightarrow \xi(t, s, y)$  la caractéristique de  $z^{\nu+1}$  qui passe par le point  $(s, y)$  de  $\bar{\Omega}_+$ .

#### Lemme 5.1.1.

Pour  $t \in [0, s]$ , on a :

$$t^3 + (\xi(t, s, y))^2 \geq \frac{1}{\beta} (s^3 + y^2) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{16}{5}.$$

*Remarque.* La constante  $\beta$  a une valeur purement technique comme on le verra dans la preuve de ce lemme, elle a été choisie égale à  $16/5$  pour simplifier un peu les calculs.

On pose :

$$(5.1.1) \quad \begin{aligned} C_2 &= \sup_{(s,y) \in \bar{\Omega}_+; \theta \in [0,1]} |H''(z^0(s, y) + \theta(z^\nu - z^0)(s, y))| \\ M_0 &= \frac{1}{2} \beta^{\frac{5}{8}} C_0 (C_2 M + P) \end{aligned}$$

et on suppose que la constante  $M'$  définie en (2.3.1) vérifie :

$$(5.1.2) \quad M' > 30 M_0.$$

#### Lemme 5.1.2.

Si  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont assez petits, alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $M'$  et  $N'$  et une constante  $C(M', N')$  telles que, pour tout  $(s, y)$  dans  $\bar{\Omega}_+ \setminus (0, 0)$ , on ait :

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^s \left| (H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0) \frac{\partial^2}{\partial y^2} z^0(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \\ &\leq \frac{M_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{8}}} + C \\ B &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^s \left| (H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)) (\partial_y z^0(t, \xi(t, s, y)))^2 \right| dt \leq C \\ C &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^s \left| H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \\ &\leq \beta^{\frac{1}{8}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{8}}} + C(M', N')\sqrt{s} \end{aligned}$$

**Lemme 5.1.3.**

Il existe une constante  $C(M', N')$  telle que :

$$\int_0^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y))| dt \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(M', N') \sqrt{s}.$$

On va supposer que ces trois lemmes sont démontrés et on prouve alors que :

**Lemme 5.1.4.**

Il existe une constante  $C(M', N')$  dépendant continûment de  $M'$  et  $N'$  telle que :

$$|\partial_y(z^{\nu+1} - z^0)(s, y)| \leq (2M_0 + \frac{9}{10}M') \frac{1}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N').$$

*Remarque.* La notation  $C(M', N')$  représente une constante qui dépend de  $M'$  et  $N'$  dont la valeur peut éventuellement changer au cours de la démonstration.

*Preuve.*

On pose  $v(s, y) = \partial_y(z^{\nu+1} - z^0)(s, y)$ . On dérive l'équation (3.2.1) par rapport à  $y$  et on obtient que  $v$  est solution de :

$$(5.1.3) \quad \begin{cases} \partial_t v - (H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu) \partial_y v = \\ \quad H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu) v \\ \quad + (H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0) \partial_y(z^0)) \partial_y z^0 \\ \quad + (H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0) \frac{\partial^2 z^0}{\partial y^2}. \\ v(0, y) = 0 \end{cases}$$

Les fonctions  $v$  et  $z^{\nu+1}$  ont les mêmes caractéristiques ; on intègre le long de l'une d'entre elles :

$$\begin{aligned} |v(s, y)| &\leq \int_0^s |(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0) \frac{\partial^2 z^0}{\partial y^2}(t, \xi(t, s, y))| dt \\ &\quad + \int_0^s |(H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0) \partial_y z^0) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt \\ &\quad + \int_0^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu) v(t, \xi(t, s, y))| dt \end{aligned}$$

On utilise une inégalité triangulaire sur le deuxième terme et le lemme 5.1.2 sur le premier, d'où :

$$\begin{aligned}
|v(s, y)| &\leq \frac{M_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C \\
&+ \int_0^s |(H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu) \partial_y z^0)| dt \\
&+ \int_0^s |(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)) (\partial_y z^0)^2(t, \xi(t, s, y))| dt \\
&+ \int_0^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu) v(t, \xi(t, s, y))| dt
\end{aligned}$$

Le lemme 5.1.2 nous permet de majorer les deux premières intégrales et on obtient :

$$\begin{aligned}
|v(s, y)| &\leq \frac{M_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + 2C + \beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N') \sqrt{s} \\
&+ \int_0^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu) v(t, \xi(t, s, y))| dt \\
&\leq (\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) M' + M_0) \frac{1}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N') \\
&+ \int_0^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu) v(t, \xi(t, s, y))| dt \\
&\quad \text{car } s \text{ est majorée par } \eta.
\end{aligned}$$

On pose :

$$\phi(s, y) = (\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) M' + M_0) \frac{1}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N').$$

Le lemme de Gronwall permet alors de majorer  $v(s, y)$  par :

$$\begin{aligned}
|v(s, y)| &\leq \phi(s, y) + \\
&\int_0^s \phi(t, \xi(t, s, y)) |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y))| \times \\
&\text{Exp}\left(\int_t^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi(\alpha, s, y))| d\alpha\right) dt
\end{aligned}$$

D'après le lemme 5.1.3, on a :

$$\begin{aligned}
&\text{Exp}\left(\int_t^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi(\alpha, s, y))| d\alpha\right) \\
&\leq \frac{3}{2} + C(M', N') \sqrt{s}.
\end{aligned}$$

Les lemmes 5.1.1 et 5.1.3 nous donnent également :

$$\begin{aligned} & \int_0^s \phi(t, \xi(t, s, y)) |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y))| dt \\ & \leq \left( (\beta^{\frac{1}{6}} \ln(\frac{3}{2}) M' + M_0) \frac{\beta^{\frac{1}{6}}}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N') \right) \times \\ & \quad \int_0^s |H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y))| dt \\ & \leq \left( (\beta^{\frac{1}{6}} \ln(\frac{3}{2}) M' + M_0) \frac{\beta^{\frac{1}{6}}}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N') \right) (\ln(\frac{3}{2}) + C(M', N') \sqrt{s}) \end{aligned}$$

On obtient finalement en regroupant ces différentes estimations :

$$\begin{aligned} & |v(s, y)| \\ & \leq (1 + \frac{3}{2} \beta^{\frac{1}{6}} \ln(\frac{3}{2})) (\beta^{\frac{1}{6}} \ln(\frac{3}{2}) M' + M_0) \frac{1}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N'). \end{aligned}$$

Pour conclure, on remarque que :

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{3}{2} \beta^{\frac{1}{6}} \ln(\frac{3}{2}) \leq 2 \\ & (1 + \frac{3}{2} \beta^{\frac{1}{6}} \ln(\frac{3}{2})) \beta^{\frac{1}{6}} \ln(\frac{3}{2}) \leq \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

On a donc montré le lemme 5.1.4  $\square$

L'hypothèse (5.1.2) montre alors la première estimation de la proposition (5.1.1) si l'on suppose  $s$  et  $y$  assez petits. En effet, on a alors :

$$2M_0 + \frac{9}{10} M' < \frac{29}{30} M'$$

donc :

$$\begin{aligned} |v(s, y)| & \leq \frac{29}{30} \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N') \\ & \leq \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

*5.1.2 Estimation de  $\partial_t(z^\nu - z^0)$ .*

On revient à l'équation vérifiée par  $z^{\nu+1}$  et on a alors :

$$\partial_t z^{\nu+1} = (H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu) \partial_y z^{\nu+1}.$$

Or, d'après le lemme 5.1.4 et l'estimation (2.2.8) de  $\partial_y z^0$ , on a, pour  $t$  et  $y$  assez petits :

$$\begin{aligned} (5.1.4) \quad |\partial_y z^{\nu+1}(s, y)| & \leq |\partial_y z^0(s, y)| + |\partial_y(z^{\nu+1} - z^0)(s, y)| \\ & \leq \frac{C_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} \\ & \leq \frac{2C_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 5.1.4 et l'estimation (2.2.8) de  $\partial_y z^0$ , on a, pour  $t$  et  $y$  assez petits :

$$(5.1.4) \quad \begin{aligned} |\partial_y z^{\nu+1}(s, y)| &\leq |\partial_y z^0(s, y)| + |\partial_y(z^{\nu+1} - z^0)(s, y)| \\ &\leq \frac{C_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} \\ &\leq \frac{2C_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

**Lemme 5.1.5.**

Il existe une constante  $M''$  strictement positive dépendant de  $M'$  telle que, pour tout  $(s, y) \in \bar{\Omega}_+ \setminus (0, 0)$ , on ait :

$$|\partial_t z^{\nu+1}(s, y)| \leq \frac{M''}{\sqrt{s}}.$$

*Preuve.*

Il nous reste à estimer  $H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu$  pour obtenir le résultat. D'après le lemme 1.3.1 qui donne un développement limité de  $\sigma^\nu$  et les estimations démontrées précédemment sur  $z^0$ , on a :

$$\begin{aligned} \sigma^\nu(s) &= -H'(z_-^0(s)) + O((s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}) \quad \text{d'où} \\ H'(z^\nu - w^\nu)(s, y) + \sigma^\nu(s) &= H'(z^\nu - w^\nu)(s, y) - H'(z_-^0(s)) \\ &\quad + O((s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}) \\ &= ((z^\nu - w^\nu)(s, y) - z_-^0(s))H''(z_-^0(s)) \\ &\quad + O((s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}) \\ &= (z^\nu(s, y) - z^0(s, y) - w^\nu(s, y))H''(z_-^0(s)) + \\ &\quad (z^0(s, y) - z_-^0(s))H''(z_-^0(s)) + O((s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}) \\ &= O((s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}). \end{aligned}$$

car  $z^\nu(s, y) - z^0(s, y) - w^\nu(s, y) = O(s)$  et  $z^0(s, y) - z_-^0(s) = O((s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}})$ .

On regroupe ce résultat avec l'estimation (5.1.4) et on a démontré le lemme 5.1.5  $\square$

**5.2 Estimation des dérivées partielles de  $w^{\nu+1}$ .**

La fonction  $w^{\nu+1}$  est solution de l'équation suivante :

$$\partial_t w^{\nu+1} = -(H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu) \partial_y w^{\nu+1}$$

or, d'après ce qui précède, on a  $H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu = O(1)$  donc les deux dérivées partielles de  $w^{\nu+1}$  sont du même ordre.

**Lemme 5.2.1.**

Il existe une constante  $C(M')$  qui ne dépend que de  $M'$  telle que, pour tout  $(s, y) \in \bar{\Omega}_+$ , on ait :

$$\begin{cases} |\partial_s w^{\nu+1}(s, y)| \leq C(M'') \sqrt{s} \\ |\partial_y w^{\nu+1}(s, y)| \leq C(M'') \sqrt{s} \end{cases}$$

*Preuve.*

On a défini  $w^{\nu+1}$  par (4.2.2) en posant :

$$w^{\nu+1}(s, y) = w_+^{\nu+1}(t) \quad \text{avec } t \leq s$$

où  $t$  est défini de manière unique si  $s$  et  $y$  sont connus et :

$$w_+^{\nu+1}(t) = W(z_+^{\nu+1}(t), z_-^{\nu+1}(t)) [z^{\nu+1}]^3.$$

On note  $C_W$  une majoration des fonctions  $W, \partial_{x_1} W$  et  $\partial_{x_2} W$  prises en  $z_+^{\nu+1}(t), z_-^{\nu+1}(t)$  pour  $t \in [0, \eta]$ . La constante  $C_W$  dépend de  $M'$  et on a, d'après le lemme 5.1.5 :

$$\begin{aligned} |\partial_t w_+^{\nu+1}(t)| &\leq C_W \{ 3 [z^{\nu+1}]^2 |\partial_t z^{\nu+1}| + [z^{\nu+1}]^3 (|\partial_t z_-^{\nu+1}| + |\partial_t z_+^{\nu+1}|) \} \\ &\leq C_W (12(C_0)^2 t + 16(C_0)^3 t^{\frac{3}{2}}) \frac{M''}{\sqrt{t}} \\ &\leq 14 C_W (C_0)^2 M'' \sqrt{t} \quad \text{pour } t \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

On prend  $C(M'') = 14 C_W (C_0)^2 M''$  et on a prouvé le lemme car  $t \leq s$   $\square$

### 5.3 Preuve de la proposition 5.1.1.

Les lemmes 5.1.4 et 5.2.1 prouvent cette proposition. En effet, on définit le voisinage du choc sur lequel on travaille par le lemme 5.1.4 pour obtenir la première estimation de la proposition et on prend  $N' = C(M')$ .

### 5.4 Preuve des premiers lemmes.

#### 5.4.1 Preuve du lemme 5.1.1.

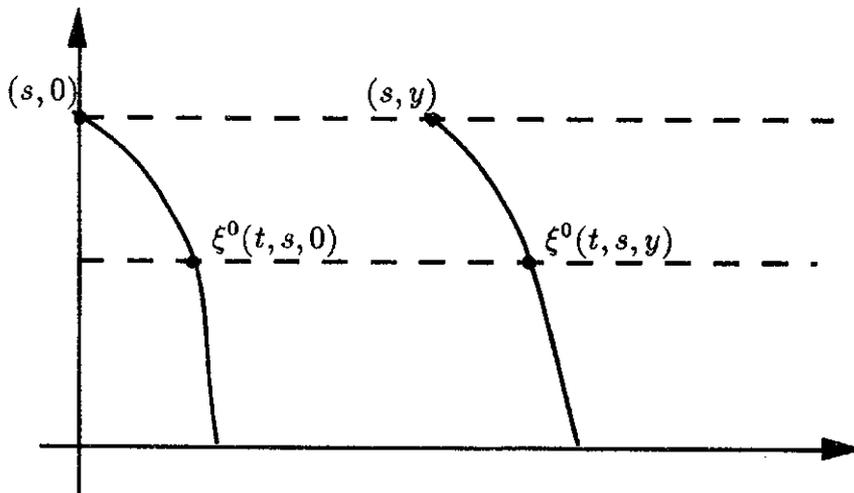


Figure 5.4.1

On note  $t \rightarrow \xi^0(t, s, y)$  la caractéristique de la fonction  $z^0$  qui passe par le point  $(s, y)$  de  $\Omega_+$ . On a vu, dans le lemme 2.2.1, qu'une caractéristique de  $z^0$  vérifie :

$$\xi^0(t, s, y) - y = \sqrt{s}(s - t) + O(s(s - t) + y^{\frac{1}{3}}(s - t))$$

donc, en particulier, pour la caractéristique  $\xi^0(t, s, 0)$  qui passe par le point  $(s, 0)$ , on a :

$$\xi^0(t, s, 0) = \sqrt{s}(s - t) + O(s(s - t))$$

donc

$$\xi^0(t, s, 0) \geq \sqrt{s}(s - t) - C s(s - t).$$

Montrons que :

$$y - \xi^0(t, s, y) \leq -\xi^0(t, s, 0).$$

En effet, par définition des caractéristiques de  $z^0$ , on a :

$$y - \xi^0(t, s, y) = - \int_t^s \left( H'(z^0)(\alpha, \xi^0(\alpha, s, y)) + \sigma^0(\alpha) \right) d\alpha$$

or la fonction  $y \rightarrow \xi^0(t, s, y)$  est croissante. On a également vu dans le paragraphe (2.2.3) que la fonction  $-\partial_y(H'(z^0))$  est négative; on en déduit que  $y \rightarrow -H'(z^0)(t, \xi^0(t, s, y))$  est décroissante, d'où :

$$\begin{aligned} y - \xi^0(t, s, y) &= - \int_t^s \left( H'(z^0)(\alpha, \xi^0(\alpha, s, y)) + \sigma^0(\alpha) \right) d\alpha \\ &\leq - \int_t^s \left( H'(z^0)(\alpha, \xi^0(\alpha, s, 0)) + \sigma^0(\alpha) \right) d\alpha \\ &\leq 0 - \xi^0(t, s, 0) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \xi^0(t, s, y) &\geq y + \xi^0(t, s, 0) \\ &\geq y + \sqrt{s}(s - t) - C s(s - t) \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 3.2.1, on a :

$$|\xi(t, s, y) - \xi^0(t, s, y)| \leq R s(s - t) \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} \xi(t, s, y) &\geq \xi^0(t, s, y) - R s(s - t) \\ &\geq y + \sqrt{s}(s - t)(1 - (C + R)\sqrt{s}). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour  $s$  et  $y$  assez petits, on a :

$$(5.4.1) \quad \xi(t, s, y) \geq y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{s}(s - t) \quad \text{pour } t \in [0, s].$$

*Remarque.* La constante est prise égale à  $\sqrt{3}/2$  de manière arbitraire ; on aurait pu prendre n'importe quel réel positif et strictement plus petit que 1.

On a  $y \geq 0$  et  $s \geq t$  donc :

$$\begin{aligned} \xi^2 &\geq y^2 + \frac{3}{4} s (s-t)^2 && \text{et} \\ t^3 + \xi^2 &\geq y^2 + \frac{3}{4} s (s-t)^2 + t^3. \end{aligned}$$

On étudie alors la fonction  $f$  définie par :

$$f : \begin{cases} [0, s] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{3}{4} s (s-t)^2 + t^3 \end{cases}$$

et on montre que  $f(t) \geq f(s/2) \geq \frac{5}{16} s^3$ . On a donc :

$$t^3 + \xi^2 \geq \frac{5}{16} s^3 + y^2 \geq \frac{5}{16} (y^2 + t^3) \quad \square$$

#### 5.4.2 Preuve du lemme 5.1.2.

On utilise les estimations (2.2.8) majorant  $\partial_{y^2}^2 z^0(t, y)$  par  $C_0 (t^3 + y^2)^{-\frac{5}{8}}$  et celles de la proposition 4.2.1 majorant  $z^\nu - z^0$  et  $w^\nu$  respectivement par  $Mt$  et  $Nt^{\frac{3}{2}}$  ainsi que la définition de la constante  $C_2$  et on obtient :

$$\begin{aligned} A &\leq C_0 \int_0^s (C_2(Mt + Nt^{\frac{3}{2}}) + Pt) \frac{dt}{(t^3 + \xi^2(t, s, y))^{\frac{5}{8}}} \\ &\leq C_0 \frac{\beta^{\frac{5}{8}}}{(s^3 + y^2)^{\frac{5}{8}}} \int_0^s (C_2(Mt + Nt^{\frac{3}{2}}) + Pt) dt \quad \text{d'après le lemme 5.1.1} \\ &\leq \frac{C_0 \beta^{\frac{5}{8}}}{(s^3 + y^2)^{\frac{5}{8}}} \left( (C_2 M + P) \frac{s^2}{2} + \frac{2}{5} C_2 N s^{\frac{5}{2}} \right) \\ &\leq \frac{M_0 s^2}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{5} C_0 C_2 N \beta^{\frac{5}{8}} \\ &\quad \text{car } M_0 = \frac{1}{2} \beta^{\frac{5}{8}} C_0 (C_2 M + P) \quad \text{et } s^{\frac{5}{2}} \leq (s^3 + y^2)^{\frac{5}{8}} \\ &\leq M_0 \frac{1}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{8}}} + C \\ &\quad \text{car } s^2 \leq (s^3 + y^2)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

On montre de même grâce au lemme 5.1.1 la majoration de l'intégrale  $B$ . En

effet, on a, en utilisant un développement de Taylor :

$$\begin{aligned}
B &\leq \int_0^s |(z^\nu - z^0 - w^\nu) H'''(z^0 + \theta(z^\nu - z^0 - w^\nu))| (\partial_y z^0(t, \xi(t, s, y)))^2 dt \\
&\leq C_3 \int_0^s (Mt + Nt^{\frac{3}{2}}) \frac{dt}{(t^3 + \xi^2(t, s, y))^{\frac{2}{3}}} \\
&\quad \text{avec } C_3 = \text{Max}_{x \in \bar{\Omega}; \theta \in [0,1]} |H'''(z^0 + \theta(z^\nu - z^0 - w^\nu))| \\
&\leq C_3 \frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{(s^3 + y^2)^{\frac{2}{3}}} \int_0^s (Mt + Nt^{\frac{3}{2}}) dt \\
&\quad \text{d'après le lemme 5.1.1} \\
&\leq C_3 \int_0^s (M + N\sqrt{t}) dt \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Il nous reste à estimer l'intégrale  $C$ . On utilise une inégalité triangulaire, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
C &\leq \int_0^s |(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)) \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt \\
&\quad + \int_0^s |H''(z^0) \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt
\end{aligned}$$

Pour majorer la première intégrale, on utilise la formule de Taylor et la constante  $C_3$  définie plus haut ; on a :

$$\begin{aligned}
|(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0))(t, y)| &\leq C_3 (|z^\nu - z^0| + |w^\nu|) \\
&\leq C_3 (Mt + Nt^{\frac{3}{2}}) \\
&\quad \text{d'après la proposition 4.2}
\end{aligned}$$

On a supposé :

$$|\partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)(s, y)| \leq \frac{M'}{(t^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + N' \sqrt{t}.$$

On a également vu que :

$$|\partial_y z^0(s, y)| \leq \frac{C_0}{(t^3 + y^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

La première intégrale obtenue dans la majoration de  $C$  donne alors :

$$\begin{aligned}
&\int_0^s |(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)) \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt \\
&\leq C_3 C_0 \int_0^s (Mt + Nt^{\frac{3}{2}}) \left( \frac{M'}{(t^3 + \xi^2)^{\frac{1}{6}}} + N' \sqrt{t} \right) \frac{dt}{(t^3 + \xi^2)^{\frac{1}{3}}} \\
&\leq C(M', N') \sqrt{s}.
\end{aligned}$$

Le lemme 5.1.1 nous permet de majorer l'intégrale restante :

$$\begin{aligned}
& \int_0^s |H''(z^0) \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt \leq \\
& \int_0^s |H''(z^0) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| \left( \frac{M'}{(t^3 + \xi^2(t, s, y))^{\frac{1}{6}}} + N' \sqrt{t} \right) dt \\
& \leq \frac{\beta^{\frac{1}{6}} M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} \int_0^s |H''(z^0) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt + C(M', N') \sqrt{s} \\
& \leq \frac{\beta^{\frac{1}{6}} M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} (1 + \tilde{C} \sqrt{s}) \int_0^s |\partial_y(H'(z^0))(t, \xi_0(t, s, y))| dt \\
& \quad \text{d'après les lemmes 2.2.3 et 3.2.2 et avec} \\
& \quad \xi_0 \text{ caractéristique de } z^0 \text{ qui passe par } (s, y) \\
& \leq \frac{\beta^{\frac{1}{6}} M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} (1 + \tilde{C} \sqrt{s}) (\ln(\frac{3}{2}) + c \sqrt{s}) \\
& \quad \text{d'après le lemme 2.2.2.}
\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$C \leq M' \frac{\beta^{\frac{1}{6}}}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} \ln(\frac{3}{2}) + C(M', N') \sqrt{s}.$$

#### 5.4.3 Preuve du lemme 5.1.3.

On utilise l'inégalité triangulaire pour séparer l'intégrale à majorer en trois intégrales.

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^s H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y)) dt \right| \\
& \leq \int_0^s |(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y))| dt \\
& \quad + \int_0^s |H''(z^0) \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)(t, \xi(t, s, y))| dt \\
& \quad + \int_0^s |H''(z^0) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt
\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales se majorent en utilisant les estimations (2.3.1) et (2.3.2) par  $C(M', N') \sqrt{s}$ . En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (z^\nu - z^0 - w^\nu)(s, y) = O(s) \\ \partial_y(z^\nu - w^\nu)(s, y) = O(\frac{1}{s}) \\ \partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)(s, y) = O(\frac{1}{\sqrt{s}}) \end{array} \right.$$

Pour la dernière intégrale, on applique les lemmes 2.2.2, 2.2.3 et 3.2.1 comme cela a été fait dans la preuve du lemme précédent et on obtient :

$$\left| \int_0^s H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y(z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y)) dt \right| \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(M', N') \sqrt{s}.$$

## 6. Convergence des suites $(z^\nu)$ et $(w^\nu)$

On va montrer que les suites  $(z^\nu)$  et  $(w^\nu)$  sont des suites de Cauchy pour la norme  $L^\infty$ .

### 6.1 Estimation de $\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1}$ .

#### Lemme 6.1.1.

On a l'estimation suivante :

$$\|\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1}\|_{L^\infty([0, \eta])} \leq C (\| [w^\nu - w^{\nu-1}] \|_{L^\infty([0, \eta])} + \| [z^\nu - z^{\nu-1}] \|_{L^\infty([0, \eta])}).$$

*Preuve.*

D'après le lemme 1.3.1, il existe une fonction  $f$  de classe  $C^{p-2}$  telle que :

$$\begin{cases} \sigma^\nu = -H'(z_-^0) - \frac{1}{2} [z^\nu - w^\nu] H''(z_-^0) + [z^\nu - w^\nu]^2 f(z_-^0, [z^\nu - w^\nu]) \\ \sigma^{\nu-1} = -H'(z_-^0) - \frac{1}{2} [z^{\nu-1} - w^{\nu-1}] H''(z_-^0) \\ \quad + [z^{\nu-1} - w^{\nu-1}]^2 f(z_-^0, [z^{\nu-1} - w^{\nu-1}]) \end{cases}$$

En faisant la différence, on obtient :

(6.1.1)

$$\begin{aligned} \sigma^\nu - \sigma^{\nu-1} &= -\frac{1}{2} H''(z_-^0) ([z^\nu - z^{\nu-1}] - [w^\nu - w^{\nu-1}]) \\ &\quad + ([z^\nu - w^\nu]^2 - [z^{\nu-1} - w^{\nu-1}]^2) f(z_-^0, [z^\nu - w^\nu]) \\ &\quad + [z^{\nu-1} - w^{\nu-1}]^2 (f(z_-^0, [z^\nu - w^\nu]) - f(z_-^0, [z^{\nu-1} - w^{\nu-1}])). \end{aligned}$$

On utilise alors la proposition 4.2.2 qui majore uniformément  $z^\nu - z^0$  et  $w^\nu$  et on fait un développement de Taylor de la fonction  $f$  par rapport à la deuxième variable pour obtenir le résultat  $\square$

### 6.2 Estimation de $z^{\nu+1} - z^\nu$ .

#### Lemme 6.2.1.

On a l'estimation suivante :

$$\|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{3}{4} (\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

*Preuve.*

La fonction  $z^{\nu+1} - z^\nu$  est la solution sur  $\bar{\Omega}_+$  de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(6.2.1) \quad \begin{cases} \partial_t(z^{\nu+1} - z^\nu)(s, y) - (H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu) \partial_y(z^{\nu+1} - z^\nu)(s, y) = \\ (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu) \partial_y z^\nu(s, y) \\ (z^{\nu+1} - z^\nu)(0, y) = 0 \end{cases}$$

On intègre le long d'une caractéristique de  $z^{\nu+1}$  et on obtient que :

$$\begin{aligned} & (z^{\nu+1} - z^\nu)(s, y) \\ &= \int_0^s (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu) \\ & \quad \partial_y z^\nu(t, \xi(t, s, y)) dt \\ &= \int_0^s (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu) \\ & \quad \partial_y (z^\nu - z^0)(t, \xi(t, s, y)) dt + \\ & \quad \int_0^s (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu) \\ & \quad \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y)) dt \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Taylor et le lemme 6.1.1 sur la première intégrale et on la majore par :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu) \partial_y (z^\nu - z^0)(t, \xi) dt \right| \\ & \leq C \sqrt{s} (\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}) \end{aligned}$$

car :

$$|\partial_y (z^\nu - z^0)(t, y)| \leq t^{-\frac{1}{2}}.$$

On s'intéresse alors à la deuxième intégrale. D'après (6.1.1), on a également :

$$\begin{aligned} & |(\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1})(t)| \leq \\ & \left( \frac{1}{2} H''(z_-^0) + C \sqrt{t} \right) (\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s (\sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y)) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} (\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}) \times \\ & \left( \int_0^s |H''(z_-^0) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt + C \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t}} \right). \end{aligned}$$

On introduit  $H''(z^0)$  dans l'intégrale restante en utilisant une inégalité triangulaire et on conclut grâce aux lemmes 2.2.2, 2.2.3 et 3.2.1. On obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s (\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1})(t) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y)) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \left( \|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

car :

$$\int_0^s |H''(z_-^0) \partial_y z^0(t, \xi(t, s, y))| dt \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s}.$$

Pour majorer l'intégrale restante dans le calcul de  $z^{\nu+1} - z^\nu$ , on utilise la formule de Taylor et les estimations uniformes déjà trouvées. On obtient, alors, en regroupant les différentes majorations :

$$\begin{aligned} & (z^{\nu+1} - z^\nu)(s, y) \leq \\ & \left( \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s} \right) \left( \|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

On prend  $s$  assez petit pour avoir  $\frac{3}{2} \ln(3/2) + C\sqrt{s} \leq \frac{3}{4}$  et on a démontré le lemme  $\square$

### 6.3 Estimation de $w^{\nu+1} - w^\nu$ .

#### Lemme 6.3.1.

On a l'estimation suivante :

$$\|w^{\nu+1} - w^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{5} \left( \|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \right).$$

*Preuve.*

La fonction  $w^{\nu+1} - w^\nu$  est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante sur  $\bar{\Omega}_+$  :

$$(6.3.1) \quad \begin{cases} \partial_t(w^{\nu+1} - w^\nu)(s, y) + (H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu) \partial_y(w^{\nu+1} - w^\nu)(s, y) = \\ \quad (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^{\nu-1} + \sigma^\nu) \partial_y w^\nu(s, y) \\ (w^{\nu+1} - w^\nu)(0, y) = 0 \end{cases}$$

On intègre le long d'une caractéristique de  $w^{\nu+1}$  et, en reprenant les notations définies en (4.2.2), on obtient que :

$$\begin{aligned} & (w^{\nu+1} - w^\nu)(s, y) = w_+^{\nu+1}(t) - w_+^\nu(t) + \\ & \int_t^s (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^{\nu-1} + \sigma^\nu) \partial_y w^\nu(\alpha, \xi(\alpha, s, y)) d\alpha. \end{aligned}$$

*Remarque.* Si la caractéristique considérée coupe l'axe  $t = 0$ , on prend  $w_+^{\nu+1}(t) = w_+^\nu(t) = t = 0$  et le raisonnement est le même.

On utilise alors les estimations uniformes que l'on a montré. D'après le lemme 6.1.1, il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $(s, y) \in \bar{\Omega}_+$ , on ait :

$$(6.3.2) \quad |(\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1})(t)| \leq C \left( |[z^\nu - z^{\nu-1}]| + |[w^\nu - w^{\nu-1}]| \right).$$

La formule de Taylor-Lagrange nous permet de majorer le reste de l'intégrale de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s (H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu)) \partial_y w^\nu(s, \xi(t, s, y)) dt \right| \\ & \leq C_2 \left( \|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \int_0^s |\partial_y w^\nu(t, \xi(t, s, y))| dt \\ & \leq C_2 N' s^{\frac{3}{2}} \left( \|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ & \quad \text{d'après la proposition 5.1.1} \end{aligned}$$

où la constante  $C_2$  a été définie en (5.1.1) et représente une majoration de  $H''$ . On a également :

$$\begin{cases} w_+^{\nu+1}(t) = W(z_+^{\nu+1}(t), z_-^{\nu+1}(t)) [z^{\nu+1}]^3 & \text{d'où :} \\ |w_+^{\nu+1}(t) - w_+^\nu(t)| \leq C t \|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty} & \text{car } [z^{\nu+1}] = O(\sqrt{t}) \end{cases}$$

On regroupe les estimations précédentes et on obtient :

$$\begin{aligned} & |(w^{\nu+1} - w^\nu)(s, y)| \\ & \leq C_2 N' s^{\frac{3}{2}} \left( \|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ & \quad + C s \|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

On prend alors  $s$  assez petit et on utilise le lemme 6.2.1 pour démontrer le résultat  $\square$

### 6.4 Convergence du schéma.

#### Proposition 6.4.1.

Les suites de fonctions  $(w^\nu)_\nu$ ,  $(z^\nu)_\nu$  et  $(\sigma^\nu)_\nu$  convergent uniformément vers des fonctions  $w, z$  et  $\sigma$  solutions du système (2.1.3). De plus, les fonctions  $z$  et  $w$  admettent un choc en  $y = 0$ . Elles sont continues sur  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$  et vérifient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |(z - z^0)(s, y)| & \leq M s \\ |w(s, y)| & \leq N s^{\frac{3}{2}} \\ |(\sigma - \sigma^0)(s)| & \leq P s \end{aligned}$$

On a également les relations de Rankine-Hugoniot suivantes :

$$\begin{cases} \sigma = -\sqrt{\frac{[H(z-w)]}{[G(z-w)]}} \\ [z+w]^2 = [H(z-w)] [G(z-w)] \end{cases}$$

*Preuve.*

La convergence uniforme des suites de fonctions  $(w^\nu)_\nu$  et  $(z^\nu)_\nu$  impliquent tous les autres résultats. On va donc montrer que ces suites sont des suites de Cauchy pour la norme  $L^\infty(\Omega)$ .

On pose :

$$\begin{cases} x^{\nu+1} = \|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \\ y^{\nu+1} = \|w^{\nu+1} - w^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \end{cases}$$

D'après les lemmes 6.2.1 et 6.3.1, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x^{\nu+1} \leq \frac{3}{4}(x^\nu + y^\nu) \\ y^{\nu+1} \leq \frac{1}{5}(x^\nu + y^\nu) \end{cases}$$

On vérifie grâce à ces deux relations que les suites  $(x^\nu)_\nu$  et  $(y^\nu)_\nu$  sont majorées par des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 et on a alors la convergence uniforme des suites de fonctions  $(w^\nu)_\nu$  et  $(z^\nu)_\nu$ . Ce résultat nous permet de passer à la limite dans le schéma itératif car on a également des estimations uniformes sur les dérivées partielles de  $z^\nu$  et  $w^\nu$  et la convergence uniforme des suites de fonctions  $(w^\nu)_\nu$  et  $(z^\nu)_\nu$  implique que les suites de fonctions  $(\partial_y w^\nu)_\nu$  et  $(\partial_y z^\nu)_\nu$  convergent faiblement vers  $\partial_y w$  et  $\partial_y z$   $\square$

ANNEXE

EQUATIONS DIFFERENTIELLES  
DE TYPE FUCHS

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} t y'(t) = a y(t) + t f(t, y(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle  $\Theta$  un voisinage de l'origine dans  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  et on suppose :

- (1) La fonction  $f$  est continue sur  $\Theta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- (2)  $a < 1$

L'équation (1) est un type particulier d'équations différentielles étudiées par L. Fuchs. On va démontrer le théorème suivant :

**Théorème.**

- (1) L'équation différentielle (1) admet une solution locale  $y$  de classe  $C^1$  sur  $[0, \eta[$  vérifiant  $y(t) = O(t)$ .
- (2) Si la fonction  $f$  est lipschitzienne par rapport à la seconde variable alors il existe une unique solution vérifiant  $y(t) = O(t)$ .
- (3) Si la fonction  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $\Theta$  alors  $y$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $[0, \eta[$ .

*Preuve.*

On se donne une constante  $K$  strictement positive et on définit la fonction  $F$  sur  $\Theta$  par :

$$F(t, y) = \begin{cases} \frac{ay}{t} & \text{si } |y| \leq Kt \\ aK \frac{y}{|y|} & \text{si } |y| \geq Kt \end{cases}$$

et on considère l'équation différentielle suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) + f(t, y(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Les fonctions  $f$  et  $F$  sont bornées dans  $\Theta$  donc, d'après le théorème de Péano, l'équation différentielle (2) admet au moins une solution locale  $y$  appartenant à  $C^0([0, \eta[; \mathbb{R}) \cap C^1(]0, \eta[; \mathbb{R})$ . La fonction  $y'$  est bornée donc  $y(t) = O(t)$ .

Montrons que cette solution de (2) vérifie également l'équation (1). On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y(t))^2 &= 2y(t) y'(t) \\ &\leq 2(\|f\|_\infty |y(t)| + \frac{a}{t} |y(t)|^2). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\sqrt{|y(t)|^2}}{t^a} \right) = \frac{\frac{d}{dt} |y(t)|^2 - 2 \frac{a}{t} (|y(t)|^2)}{2 t^a |y(t)|} \leq \frac{\|f\|_\infty}{t^a}$$

or  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|y(t)|}{t^a} = 0$  car  $a < 1$  et  $y(t) = O(t)$ . En intégrant (3), on obtient alors :

$$|y(t)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1-a} t.$$

On choisit  $K \geq \frac{\|f\|_\infty}{1-a}$  et on a alors  $F(t, y(t)) = a \frac{y(t)}{t}$  donc  $y$  est solution de (1). Il faut également montrer que  $y$  appartient à  $C^1([0, \eta[; \mathbb{R})$ . On pose :

$$(4) \quad \begin{cases} G = \frac{f(0,0)}{1-a} \\ z(t) = y(t) - tG \end{cases}$$

On a alors :

$$(5) \quad \begin{aligned} tz'(t) - az(t) &= t(f(t, y(t)) - G(1-a)) \\ &= t(f(t, y(t)) - f(0,0)) \\ &= o(t) \text{ car } f \text{ est continue et } y(t) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que  $(zt^{-a})' = o(t^{-a})$  et  $zt^{-a} = o(t^{1-a})$  car  $z(t)t^{-a} \rightarrow 0$  quand  $t$  tend vers 0 donc  $z(t) = o(t)$ . La fonction  $y$  est alors de classe  $C^1$  sur  $[0, \eta[$ . De plus, on a :

$$y'(0) = \frac{f(0,0)}{1-a}.$$

On suppose maintenant que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la seconde variable et on note  $K$  la constante de Lipschitz. Supposons que l'équation admette deux solutions  $y$  et  $z$  vérifiant  $y(t) = O(t)$  et  $z(t) = O(t)$ . On a alors :

$$t(y'(t) - z'(t)) = a(y - z) + t(f(t, y(t)) - f(t, z(t))).$$

En multipliant cette équation par  $y - z$  et en utilisant le fait que  $f$  est lipschitzienne, on obtient :

$$\begin{aligned} t \frac{d}{dt} \left( (y - z)^2 \right) &\leq 2(a + Kt)(y - z)^2 \\ &\leq 2a'(y - z)^2 \end{aligned}$$

avec  $a < a' < 1$  si  $t$  est assez petit. On a alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{(y - z)^2}{t^{2a'}} \right) \leq 0$$

or  $z(t) - y(t) = O(t)$  d'où  $z(0) - y(0) = 0$ . La fonction  $\frac{(y-z)^2}{t^{2a'}}$  est alors une fonction positive qui décroît à partir de 0 ; elle est donc toujours nulle et on a montré le deuxième point.

Pour démontrer le dernier point, on va raisonner par récurrence. On suppose que, si la fonction  $f$  est de classe  $C^{k-1}$  alors la solution  $y$  de l'équation (1) vérifiant  $y(t) = O(t)$  est de classe  $C^k$ . Le résultat est vrai pour  $k = 1$  d'après ce que l'on vient de voir. On prend alors  $f$  de classe  $C^k$  ; d'après l'hypothèse de récurrence,  $y$  est de classe  $C^k$  et vérifie :

$$(6) \quad t y'(t) - a y(t) = t f(t, y(t)).$$

On pose :

$$y_1(t) = y'(t) - y'(0).$$

En dérivant l'équation (6) pour  $t > 0$ , on obtient :

$$\begin{cases} t y_1'(t) = (a - 1) y_1(t) + f(t, y(t)) + t f'_t(t, y(t)) + t f'_y(t, y(t)) y'(t) \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

or la fonction  $t \rightarrow f(t, y(t)) - f(0, 0)$  est de classe  $C^k$  et s'annule en  $t = 0$  donc il existe une fonction  $f_1$  de classe  $C^{k-1}$  telle que  $f(t, y(t)) - f(0, 0) = t f_1(t)$ .

On pose  $f_2(t) = f'_t(t, y(t)) + f'_y(t, y(t)) y'(t)$ ,  $f_2$  est de classe  $C^{k-1}$  et on a :

$$(7) \quad \begin{cases} t y_1'(t) = (a - 1) y_1(t) + t (f_1(t) + f_2(t)) \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (7) sont de la forme  $y_1(t) + C t^{a-1}$ , or  $a - 1 < 1$  donc  $y_1$  est la seule solution vérifiant  $y_1(t) = O(t)$  ; elle est a fortiori continue en 0 et, d'après l'hypothèse de récurrence,  $y_1$  est une fonction de classe  $C^k$  sur  $[0, \eta[$ . La fonction  $y$  est donc de classe  $C^{k+1}$  sur  $[0, \eta[$   $\square$

## Bibliographie

### Références

- [1] R. DiPerna, *Existence in the Large for Nonlinear Hyperbolic Conservation Law*, Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973), 244–257.
- [2] ———, *Decay and Asymptotic Behavior of Solutions to Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (1975), 75–100.
- [3] ———, *Uniqueness of Solutions to Hyperbolic Conservation Laws*, Ind. U. Math. J. **28** (1979), 244–257.
- [4] L. Fuchs, *Gesammelte Mathematische Werke*, Berlin, vol. 1, 1904.
- [5] J. Glimm, P.D. Lax, *Decay of Solutions of Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **101** (1970).
- [6] F. John, *Formation of Singularities in One-Dimensional Non Linear Wave Propagation*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 337–405.
- [7] S.N. Kruzkov, *Generalized Solutions for the Cauchy Problem in the Large for Non-Linear Equations of First Order*, Soviet. Math. Dokl **10** (1969), 785–788.
- [8] P.D. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **X** (1957), 537–566.
- [9] ———, *Development of Singularities of Solutions of Non Linear Hyperbolic Partial Differential Equations*, J. Math. Phys. **5** (1964), 611–613.
- [10] ———, *The Formation and Decay of Shock Waves*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 227–241.
- [11] ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shocks Waves*, Conf. Board Math. Sci. **11** (1973), SIAM.
- [12] T.P. Liu, *Admissible Solutions of Hyperbolic Conservation Laws*, Memoirs of the A.M.S **30** (1981), 240.
- [13] T. Nishida, J. Smoller, *Solutions in the Large for some Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 183–200.
- [14] O. Oleinik, *Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations*, Usp. Mat. Nauk **12** (1957), 3–73; English trans. in Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2 **26**, 95–172.
- [15] ———, *On the Uniqueness of the Generalized Solution of the Cauchy Problem for a Nonlinear System of Equations Occuring in Mechanics*, Usp. Mat. Nauk **12** (1957), 169–176. (Russian)
- [16] ———, *Uniqueness and a Stability of the Generalized Solution of the Cauchy Problem for a Quasilinear Equation*, Usp. Mat. Nauk **14** (1959), 165–170; English trans. in Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2 **33** (1964), 285–290.
- [17] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, N-Y, 1983.
- [18] H. Whitney, *Differentiable Even Functions*, Duke Math. J. **10** (1948), 159–160.

### CHAPITRE III

## APPROXIMATION DES VALEURS PROPRES D'UN OPERATEUR ELLIPTIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ISOPARAMETRIQUES

La théorie de l'approximation des valeurs propres d'un opérateur elliptique a été étudiée, de manière générale, par J. Osborn [9]. Il a montré, en particulier, que, dans le cas d'éléments finis conformes avec des polynômes de degré  $k$ , on obtient, pour l'approximation d'un vecteur propre  $u$  et d'une valeur propre  $\lambda$ , simple, d'un opérateur elliptique  $L$ , les estimations suivantes :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{k+1}) \quad \text{et} \quad |\lambda - \lambda_h| = O(h^{2k}).$$

Par contre, si on utilise la méthode des éléments finis isoparamétriques, avec des hypothèses convenables que nous précisons dans la suite, on obtient le même ordre d'erreur pour le vecteur propre mais on a seulement :

$$|\lambda - \lambda_h| = O(h^{k+1}).$$

Nous allons montrer qu'en utilisant une approximation plus soignée de la frontière du domaine considéré, on observe également une superconvergence dans l'estimation de la valeur propre, i.e  $|\lambda - \lambda_h| = O(h^{2k})$ .

Dans un but de simplification, nous travaillons avec la condition de Dirichlet mais nous pensons que le résultat reste valable avec la condition de Neumann.

### 1. Le problème exact

On considère un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  supposée  $C^\infty$  et on définit un opérateur  $L$  sur  $C^2(\bar{\Omega})$  par :

$$(1.1) \quad Lu = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

où les fonctions  $a_{ij}$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs réelles.

On suppose que  $L$  est un opérateur strictement elliptique. Plus précisément, on suppose qu'il existe une constante  $a_0$  strictement positive telle que :

$$(1.2) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x \in \mathbb{R}^2 \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 \sum_{i=1}^2 \xi_i^2$$

On associe à  $L$  une forme bilinéaire  $a_\Omega$  définie sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  par :

$$(1.3) \quad a_\Omega(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

C'est une forme coercive ; elle est de plus continue car les fonctions  $a_{ij}$  sont bornées sur  $\bar{\Omega}$ . D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème suivant :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } f \in L^2(\Omega), \text{ trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a_\Omega(u, \varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

admet une et une seule solution  $u = Tf$ . On définit ainsi un opérateur  $T$  qui est compact d'après le théorème de Rellich. On note  $T^*$  l'adjoint de  $T$  pour le produit scalaire canonique de  $L^2(\Omega)$ .

On considère  $\mu$  une valeur propre simple, réelle et non nulle de  $T$  et  $u$  une fonction propre unitaire associée. On peut alors choisir une fonction propre  $u^*$  de  $T^*$  associée à  $\mu$  et la normer de telle sorte que :

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} u^* u dx = 1.$$

On définit la forme linéaire  $\ell^*$  sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  par :

$$(1.5) \quad \ell^*(v) \stackrel{\text{dét}}{=} \int_{\Omega} u^* v dx.$$

On sait que la fonction  $u$  est en fait de classe  $C^\infty$  sur  $\bar{\Omega}$  (voir, par exemple, S. Agmon [1]). On pose :

$$\lambda = \frac{1}{\mu}.$$

Le problème  $(P_1)$  est donc équivalent au problème suivant :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} u - \lambda Tu = 0 \\ \ell^*(u) = 1 \end{array} \right.$$

On travaille avec la norme de  $W^{m,p}(\Omega)$  donnée par :

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où  $\|\cdot\|_p$  représente la norme usuelle de  $L^p(\Omega)$ . On définit également une semi-norme sur  $W^{m,p}(\Omega)$  par :

$$|u|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On utilise la modification habituelle si  $p = \infty$ .

## 2. Le problème approché

On étudie l'approximation du problème  $(P_1)$  obtenue par la méthode des éléments finis isoparamétriques de type Lagrange. On va d'abord rappeler la construction de la triangulation associée à cette méthode. Pour de plus amples détails, on peut consulter l'ouvrage de Ciarlet [5] et les articles de Ciarlet - Raviart [6] et [7].

On se donne  $k$  un entier naturel strictement positif et on prend pour élément fini  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  de référence :

- le triangle  $\hat{K} = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) ; \hat{x}_1 \geq 0 ; \hat{x}_2 \geq 0 ; \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1\}$  de sommets  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ .

-  $\hat{P} = P_k$  où  $P_k$  représente l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$

-  $\hat{\Sigma} = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) ; \hat{x}_1 = i/k ; \hat{x}_2 = j/k ; i+j \leq k ; i, j \in \mathbb{N}\}$ , l'ensemble des noeuds d'interpolation de Lagrange.

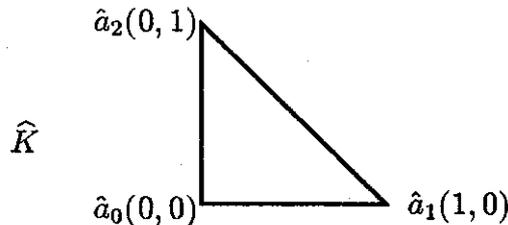


Figure 2.1

On se donne un ouvert  $\Omega_h$  approximation de  $\Omega$  et une triangulation  $\mathcal{K}_h$  utilisant des éléments finis courbes : un élément  $K$  de  $\mathcal{K}_h$  est l'image de  $\hat{K}$  par une application  $F_K$  inversible dont chaque composante appartient à  $P_k$ . L'application  $F_K$  est déterminée par la donnée des images  $a_{i,K}$  des noeuds  $\hat{a}_i$  de  $\hat{K}$ . Nous supposons que, si un côté  $\Gamma$  de  $K$  est contenu dans  $\partial\Omega_h$ , ses extrémités appartiennent aussi à  $\partial\Omega$  et que les côtés non contenus dans la frontière de  $\Omega_h$  sont droits. Ces hypothèses sont illustrées sur la figure (2.2).

On appelle  $h_K$  le diamètre du triangle  $K$  et on note  $h$  un majorant de  $h_K$  pour tout  $K$  de la triangulation  $\mathcal{K}_h$ .

On définit l'espace de fonctions  $V_h$  par :

$$(2.1) \quad V_h = \{v \in C^0(\mathbb{R}^2) ; v(x) = 0 \text{ si } x \notin \Omega_h ; v|_K \in P_k \forall K \in \mathcal{K}_h\}$$

où  $P_K$  représente l'ensemble des fonctions  $p$  de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $p \circ F_K \in P_k$ . On vérifie que :

$$(2.2) \quad V_h \subset H_0^1(\Omega_h).$$

On suppose enfin que la triangulation construite est  $k$ -régulière.

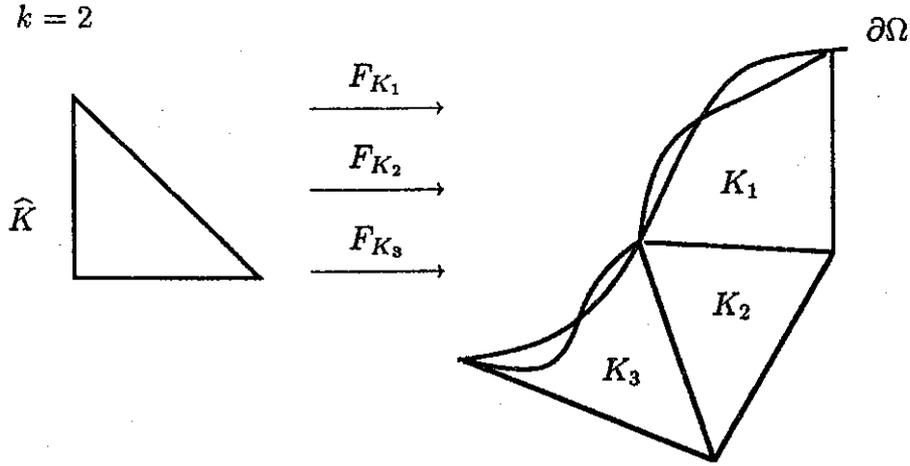


Figure 2.2

On définit alors une forme bilinéaire elliptique sur  $V_h \times V_h$  par :

$$(2.3) \quad a_h(v_h, w_h) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_h} a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} dx.$$

On lui associe deux opérateurs  $T_h$  et  $T_h^*$  définis de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sur  $V_h$  par :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2), \forall v_h \in V_h \quad \begin{cases} a_h(T_h f, v_h) = \int_{\mathbb{R}^2} f v_h dx \\ a_h(v_h, T_h^* f) = \int_{\mathbb{R}^2} f v_h dx \end{cases}$$

On définit  $u_h$  et  $\lambda_h$  comme solutions de :

$$(P_3) \quad u_h - \lambda_h T_h u_h = 0$$

On supposera, de plus, que  $u_h$  est la projection orthogonale de  $u$  sur la droite vectorielle des fonctions propres de  $T_h$  associées à  $\mu_h = 1/\lambda_h$ . On s'intéresse alors à l'estimation de  $\lambda - \lambda_h$ .

*Remarque.* Les domaines  $\Omega$  et  $\Omega_h$  ne coïncident généralement pas. On a parfois besoin de prolonger les fonctions définies sur  $\Omega$  ou  $\Omega_h$  de manière continue sur  $\mathbb{R}^2$  et on utilise la même notation pour désigner une fonction ou son prolongement. En particulier, si rien n'est précisé, une fonction de  $H_0^1(\Omega)$  est prolongée par zéro à l'extérieur de  $\Omega$ .

### 3. Hypothèses sur les triangles courbes

On va préciser les hypothèses que nous faisons sur l'approximation de la frontière de  $\Omega$ . On se donne la frontière  $\partial\Omega$  paramétrée par son abscisse

curviligne :  $\sigma \rightarrow x(\sigma)$ . On note  $\vec{n}(\sigma)$  le vecteur unitaire normal extérieur à  $\partial\Omega$  au point  $x(\sigma)$  et  $L$  la longueur de  $\partial\Omega$ .

On considère l'application :

$$(3.1) \quad \chi : (\sigma, \xi) \rightarrow \chi(\sigma, \xi) = x(\sigma) + \xi \vec{n}(\sigma).$$

Il existe  $a > 0$  tel que  $\chi$  soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $([0, L] \times [-a, a])$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\partial\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous supposons dans tout ce qui suit que  $h$  est suffisamment petit pour avoir :

$$(3.2.) \quad \partial\Omega_h \subset \mathcal{V}$$

*Remarque.* Si  $M = x(\sigma) + \xi \vec{n}(\sigma) \in \mathcal{V}$ , alors  $x(\sigma)$  est la projection orthogonale de  $M$  sur  $\partial\Omega$  et  $|\xi| = d(M, \partial\Omega)$  où  $d(M, \partial\Omega)$  représente la distance du point  $M$  à  $\partial\Omega$ .

On considère  $K$  un triangle de  $\mathcal{K}_h$  ayant un côté courbe  $\Gamma_h$  dans  $\partial\Omega_h$  et on note  $a_0 = x(\sigma_i)$  et  $a_1 = x(\sigma_{i+1})$  les extrémités de  $\Gamma_h$ . On appelle  $\Gamma$  la portion de  $\partial\Omega$  comprise entre ces deux points et on pose  $l_i = \sigma_{i+1} - \sigma_i$  sa longueur. On remarque que l'on a :

$$(3.3) \quad l_i = O(h).$$

On suppose que  $a_0 = F_K(\hat{a}_0)$  et  $a_1 = F_K(\hat{a}_1)$  où  $F_K$  est l'application de  $(P_k)^2$  qui définit  $K$  ; ainsi  $\Gamma_h$  est l'image du segment  $[\hat{a}_0, \hat{a}_1]$  par  $F_K$  et, en posant :

$$(3.4) \quad x_h(\sigma) = F_K\left(\frac{\sigma - \sigma_i}{l_i}, 0\right),$$

on obtient une équation paramétrée de  $\Gamma_h$ . De plus,  $x_h$  est un polynôme de degré  $k$  de la variable  $\sigma$ .

On a, par hypothèse, pour tout  $i$  :

$$(3.5) \quad x_h(\sigma_i) = x(\sigma_i).$$

On suppose également qu'il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour tout  $i$ , on ait :

$$(3.6) \quad |x_h(\sigma_i + j \frac{l_i}{k}) - x(\sigma_i + j \frac{l_i}{k})| \leq C l_i^{k+1} \text{ pour } j = 1, \dots, k-1.$$

### Lemme 3.1.

On suppose les hypothèses (3.3), (3.5) et (3.6) vérifiées, alors il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $i$ , on ait :

$$\|x_h - x\|_{m, \infty, [\sigma_i, \sigma_{i+1}]} \leq C h^{k+1-m} \text{ pour } m = 0, \dots, k+1.$$

*Preuve.*

On note  $\sigma \rightarrow g_h x(\sigma)$  le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points  $\sigma_i + j l_i/k$  pour  $j = 0, \dots, k$  de la fonction  $\sigma \rightarrow x(\sigma)$ . On a donc, par construction :

$$(3.7) \quad \begin{cases} g_h x(\sigma_i + j l_i/k) = x(\sigma_i + j l_i/k) \text{ pour } j = 0, \dots, k \\ g_h x \in (P_k)^2 \end{cases}$$

On en déduit classiquement que :

$$(3.8) \quad \|g_h x - x\|_{m, \infty, [\sigma_i, \sigma_{i+1}]} \leq C h^{k+1-m} \quad \text{pour } m = 0, \dots, k+1$$

avec  $C$  indépendant de  $i$  et de  $h$ . On définit un polynôme de base de Lagrange par :

$$\ell_j(\sigma) = \prod_{p \neq j} \left( \frac{\sigma - \sigma_i - p l_i/k}{(j - p) l_i/k} \right)$$

et on peut alors écrire :

$$g_h x(\sigma) - x_h(\sigma) = \sum_{m=1}^{k-1} (x(\sigma_i + m l_i/k) - x_h(\sigma_i + m l_i/k)) \ell_m(\sigma).$$

Le résultat est alors une conséquence de (3.5) et (3.6) et de l'estimation suivante :

$$\left| \frac{d^m}{d\sigma^m} \ell_j(\sigma) \right| \leq \frac{C}{l_i^m} \quad \text{pour } m = 0, \dots, k+1.$$

*Remarque.* On déduit, en particulier, de ce lemme que la fonction  $x_h$  ainsi que ses dérivées sont bornées sur  $[0, L]$  indépendamment de  $h$ .

D'après (3.2), on a vu que, pour tout  $\sigma \in [0, L]$ , il existe un unique  $\xi \in ]-a, a[$  tel que  $x(\sigma) + \xi \vec{n}(\sigma) \in \partial\Omega_h$ . On note  $d_h(\sigma)$  cette valeur de  $\xi$  et on obtient une nouvelle représentation paramétrique de  $\partial\Omega_h$  donnée par :

$$(3.9) \quad \sigma \rightarrow \tilde{x}_h(\sigma) = x(\sigma) + d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma).$$

Le lemme 3.1 donne alors :

### Corollaire 3.1.

L'application  $d_h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, L]$  et vérifie l'estimation suivante :

$$d_h(\sigma) = O(h^{k+1}).$$

*Preuve.*

La régularité de  $d_h$  est une conséquence de la régularité de  $\chi$  et de  $\partial\Omega$  ainsi que de l'hypothèse (3.2).

*Remarque.* Le paramètre  $\sigma$  intervenant dans (3.4) et (3.9) n'est pas a priori l'abscisse curviligne de  $\partial\Omega_h$ .

On note  $\widehat{K}_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \widehat{K}; y \geq 1/2\}$ . Il existe  $h_0$  tel que, pour  $h \leq h_0$ , on ait  $\widehat{K}_{\frac{1}{2}} \subset \widehat{K} \cap \Omega$ . On supposera désormais  $h \leq h_0$ .

**Lemme 3.2.**

Il existe une constante  $C_1$  strictement positive telle que, pour tout  $h \leq h_0$  et pour tout  $\widehat{v} \in P_k$ , on ait, pour  $i = 0, 1$  :

$$|\widehat{v}|_{i,\infty,\widehat{K}} \leq C_1 |\widehat{v}|_{i,2,K \cap \Omega}.$$

*Preuve.*

Toutes les normes étant équivalentes dans l'espace de dimension finie  $P_k$ , on a :

$$|\widehat{v}|_{i,\infty,\widehat{K}} \leq C_1 |\widehat{v}|_{i,2,\widehat{K}_{\frac{1}{2}}}.$$

On utilise alors  $\widehat{K}_{\frac{1}{2}} \subset \widehat{K \cap \Omega}$   $\square$

**Lemme 3.3.**

Il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour tout  $h > 0$  assez petit et pour tout  $v \in V_h$ , on ait :

$$\|v\|_{1,2,\Delta_e} \leq C h^{\frac{k}{2}} \|v\|_{1,2,\Omega \cap \Omega_h}$$

avec  $\Delta_e = \Omega_h \setminus (\Omega \cap \Omega_h)$ .

*Preuve.*

On pose  $\widehat{K \cap \Delta_e} = F_K^{-1}(K \cap \Delta_e)$  et on note  $J_K(\widehat{x})$  le jacobien de l'application  $F_K$  au point  $\widehat{x}$  de  $\widehat{K}$ . La triangulation étant supposée  $k$ -régulière, il existe  $C_0$  tel que :

$$(3.10) \quad 0 < \frac{1}{C_0} \leq \frac{J_K(\widehat{x})}{J_K(\widehat{y})} \leq C_0 \text{ pour tout } \widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{K}.$$

On en déduit :

$$(3.11) \quad \text{Aire}(\widehat{K \cap \Delta_e}) \leq \frac{\text{Aire}(K \cap \Delta_e)}{\text{Aire}(K)} \leq C h^k$$

car :

$$\begin{cases} \text{Aire}(K \cap \Delta_e) \leq C h^{k+2} \\ \text{Aire}(K) \geq C h^2 \\ \text{Aire}(\widehat{K}) = 1/2 \end{cases}$$

On considère alors une fonction  $v$  de  $P_K$ ; on pose  $\widehat{v} = v \circ F_K$  et on a alors  $\widehat{v} \in P_k$  par définition de  $P_K$ . On peut alors écrire les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |v|_{0,2,K \cap \Delta_e} &\leq \left( \text{Max}_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J_K(\widehat{x}) \right)^{\frac{1}{2}} |\widehat{v}|_{0,2,\widehat{K \cap \Delta_e}} \\ &\leq \left( \text{Max}_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J_K(\widehat{x}) \right)^{\frac{1}{2}} (\text{Aire}(\widehat{K \cap \Delta_e}))^{\frac{1}{2}} |\widehat{v}|_{0,\infty,\widehat{K}} \\ &\leq C h^{\frac{k}{2}} \left( \text{Max}_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J_K(\widehat{x}) \right)^{\frac{1}{2}} |\widehat{v}|_{0,\infty,\widehat{K}} \text{ d'après (3.11)} \\ &\leq C h^{\frac{k}{2}} \left( \text{Max}_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J_K(\widehat{x}) \right)^{\frac{1}{2}} |\widehat{v}|_{0,2,K \cap \Omega} \text{ d'après le lemme 3.2} \\ &\leq C h^{\frac{k}{2}} \left( \frac{\text{Max}_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J_K(\widehat{x})}{\text{Min}_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J_K(\widehat{x})} \right)^{\frac{1}{2}} |v|_{0,2,K \cap \Omega}. \end{aligned}$$

L'inégalité (3.10) donne alors :

$$(3.12) \quad |v|_{0,2,K \cap \Delta_e} \leq C_1 h^{\frac{k}{2}} |v|_{0,2,K \cap \Omega}.$$

La  $k$ -régularité de la triangulation implique également qu'il existe  $C$  tel que, pour tout  $K \in \mathcal{K}_h$ , on ait :

$$(3.13) \quad \begin{cases} \|DF_K\|_{0,\infty,K} \leq Ch \\ \|DF_K^{-1}\|_{0,\infty,K} \leq \frac{C}{h} \end{cases}$$

On majore également la semi-norme  $H^1$  de  $v$  :

$$\begin{aligned} |v|_{1,2,K \cap \Delta_e} &\leq \left( \text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x}) \right)^{\frac{1}{2}} \|DF_K^{-1}\|_{0,\infty,K}^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{1,2,\widehat{K \cap \Delta_e}} \\ &\leq Ch^{\frac{k}{2}} \left( \text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x}) \right)^{\frac{1}{2}} \|DF_K^{-1}\|_{0,\infty,K}^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{1,\infty,\hat{K}} \\ &\quad \text{d'après (3.11)} \\ &\leq Ch^{\frac{k}{2}} \left( \frac{\text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x})}{\text{Min}_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x})} \right)^{\frac{1}{2}} \|DF_K^{-1}\|_{0,\infty,K}^{\frac{1}{2}} \|DF_K\|_{0,\infty,\hat{K}}^{\frac{1}{2}} |v|_{1,2,K \cap \Omega} \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2. Les inégalités (3.13) donnent alors :

$$(3.14) \quad |v|_{1,2,K \cap \Delta_e} \leq C_2 h^{\frac{k}{2}} |v|_{1,2,K \cap \Omega}.$$

On ajoute les inégalités (3.12) et (3.14) et on obtient le résultat annoncé en sommant ces inégalités sur tous les triangles concernés  $\square$

*Remarque.* L'inégalité (3.14) est optimale contrairement à l'inégalité (3.12) qu'on peut améliorer.

#### 4. Résultats connus

On va rappeler des estimations déjà connues qui nous serviront dans la suite.

La première estimation concerne les opérateurs  $T$  et  $T_h$  ; si la triangulation est  $k$ -régulière, on a :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} &\text{Pour tout } u \in H^{k+1}(\mathbb{R}^2), \\ &\|(T - T_h)u\|_{m,2,\Omega \cap \Omega_h} \leq Ch^{k+1-m} \|Tu\|_{k+1,2,\Omega} \text{ pour } m = 0, 1. \end{aligned}$$

On trouvera une démonstration de ce résultat dans M. Zlámal [10] et [11]. On en déduit que :

$$(4.2) \quad \|(T - T_h)u\|_{0,2,\mathbb{R}^2} = O(h^{k+1}).$$

En effet, si on écrit l'inégalité de Poincaré, on obtient :  
pour tout  $u \in H^{k+1}(\mathbb{R}^2)$ , tel que  $Tu \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$  :

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{0,2,\Omega \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} &\leq Ch^{k+1} \|\nabla Tu\|_{0,2,\Omega \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} \text{ d'après le lemme 3.1} \\ &\leq Ch^{k+1} \|\nabla Tu\|_{1,2,\Omega}. \end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} \|T_h u\|_{0,2,\Omega_h \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} &\leq Ch^{k+1} \|\nabla T_h u\|_{0,2,\Omega_h \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} \\ &\leq Ch^{k+1} \|T_h u\|_{1,2,\Omega \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} \\ &\leq Ch^{\frac{3}{2}k+1} \|T_h u\|_{1,2,\Omega \cap \Omega_h} \text{ d'après le lemme 3.3} \\ &\leq Ch^{\frac{3}{2}k+1} \text{ d'après (4.1)} \end{aligned}$$

*Remarque.* on note de manière générique  $C$  toutes les constantes qui ne dépendent pas de  $h$ .

On regroupe (4.1) et ces deux résultats :

$$\begin{aligned} \|(T - T_h)u\|_{0,2,\mathbb{R}^2} &\leq \|(T - T_h)u\|_{0,2,\Omega \cap \Omega_h} + \|(T - T_h)u\|_{0,2,\mathbb{R}^2 \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} \\ &\leq \|(T - T_h)u\|_{0,2,\Omega \cap \Omega_h} + \|T_h u\|_{0,2,\Omega_h \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} \\ &\quad + \|Tu\|_{0,2,\Omega \setminus (\Omega \cap \Omega_h)} \end{aligned}$$

car  $T_h u = 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\Omega_h)$  et  $Tu = 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\Omega)$ . On a bien sûr les mêmes estimations sur les opérateurs  $T^*$  et  $T_h^*$ .

On applique ces deux résultats à la théorie générale sur l'approximation des éléments propres d'un opérateur elliptique faite par J. Osborn [9].

$T$  est un opérateur compact de  $L^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . On définit alors un opérateur  $\tilde{T}$  compact de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  de la manière suivante :

Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , alors :

$$\begin{cases} \tilde{T}u = T(u/\Omega) & \text{sur } \Omega \\ \tilde{T}u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \end{cases}$$

$T_h$  est un opérateur de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dans  $V_h$  donc a fortiori de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . On note  $E$  (respectivement  $E_h$ ) la projection de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sur l'espace des vecteurs propres généralisés de  $T$  (respectivement  $T_h$ ) associés à la valeur propre  $\mu$  (respectivement  $\mu_h = 1/\lambda_h$ ). Les valeurs propres étant supposées simples, ces espaces se réduisent à la droite vectorielle engendrée respectivement par  $u$  et  $u_h$  définis en  $(P_1)$  et  $(P_3)$ . On remarque que l'on a  $u_h = E_h u$ . On note  $R(E)$  l'image de l'application  $E$  et on pose :

$$\begin{cases} \delta(M, N) = \text{Sup} \{ \{ \text{Inf} \|f - g\|_{0,2,\mathbb{R}^2} ; g \in N \} f \in M ; \|f\|_{0,2,\mathbb{R}^2} = 1 \} \\ \hat{\delta}(M, N) = \text{Max}(\delta(M, N), \delta(N, M)) \end{cases}$$

où  $M$  et  $N$  sont deux sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  alors J. Osborn [9] a montré :

Il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  tels que :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \widehat{\delta}(R(E), R(E_h)) \leq C_1 \|(T - T_h)_{/R(E)}\| \\ |\mu - \mu_h| \leq C_2 \|(T - T_h)_{/R(E)}\| \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \|(T - T_h)_{/R(E)}\| &= \text{Sup}\{|(T - T_h)f, \varphi|; f \in R(E), \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2); \\ &\quad \|f\|_{0,2,\mathbb{R}^2} = \|\varphi\|_{0,2,\mathbb{R}^2} = 1\} \\ &\leq \text{Sup}\{\|(T - T_h)f\|_{0,2,\mathbb{R}^2}; \|f\|_{0,2,\mathbb{R}^2} = 1\} \\ &\leq C h^{k+1} \text{ d'après (4.2)} \end{aligned}$$

On en déduit donc, pour  $u \in R(E)$  avec  $\|u\|_{0,2,\Omega} = 1$  et  $u_h = E_h u_h$  :

$$(4.4) \quad \|u - u_h\|_{0,2,\mathbb{R}^2} = O(h^{k+1})$$

$$(4.5) \quad |\lambda - \lambda_h| = O(h^{k+1})$$

### 5. Le théorème

On reprend les notations du paragraphe 3 et on rappelle qu'on a supposé :

(1) Pour tout  $i$  :

$$(H_1) \quad x(\sigma_i) = x_h(\sigma_i)$$

(2) Il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour tout  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  et pour tout  $i$ , on ait :

$$(H_2) \quad |x_h(\sigma_i + j \frac{l_i}{k}) - x(\sigma_i + j \frac{l_i}{k})| \leq C l_i^{k+1}.$$

On note  $\theta_0 = 0, \dots, \theta_k = 1$  les  $k+1$  points de Gauss-Lobatto de l'intervalle  $[0, 1]$  et on pose :

$$(5.1) \quad \sigma_{i,j} = \sigma_i + \theta_j l_i \quad \text{pour } j = 0, \dots, k.$$

#### **Théorème.**

Si les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont vérifiées et si la triangulation  $\mathcal{K}_h$  est  $k$ -régulière, alors il existe une constante  $M$  indépendante de  $h$  telle que :

$$|\lambda - \lambda_h| \leq M (h^{2k} + \text{Max}_{i,j} |x(\sigma_{i,j}) - x_h(\sigma_{i,j})|).$$

Si on suppose alors l'hypothèse  $(H)$  suivante également vérifiée :

$$(H) \quad \text{Max}_{i,j} |x(\sigma_{i,j}) - x_h(\sigma_{i,j})| = O(h^{2k}),$$

on obtient bien le phénomène de superconvergence :

$$\lambda - \lambda_h = O(h^{2k}).$$

On va décomposer la preuve de ce théorème en deux propositions.

**Proposition 1.**

Il existe une constante  $C_1$  telle que :

$$\left| \lambda - \lambda_h - \int_{\partial\Omega} g(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma \right| \leq C_1 h^{2k}$$

où  $g$  est une fonction régulière de  $\sigma$ .

On estime alors l'intégrale avec la proposition suivante :

**Proposition 2.**

Soit  $\varphi \in W^{k-1,1}(\partial\Omega)$ , alors il existe une constante  $C_2$  strictement positive telle que :

$$\left| \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma \right| \leq C_2 \left\{ h^{2k} (|\varphi|_{k-1,1,\partial\Omega} + L \|\varphi\|_{k-2,\infty,\partial\Omega}) \right. \\ \left. + L \|\varphi\|_{k-2,\infty,\partial\Omega} \text{Max}_{i,j} |(x - x_h)(\sigma_{i,j})| \right\}.$$

*Remarque.* La dimension deux sur laquelle on travaille n'intervient pas dans la preuve de la première proposition.

Il est clair que ces deux propositions impliquent le théorème. On va maintenant donner quelques notations. On sépare le domaine  $\Omega \cup \Omega_h$  en posant :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \Theta = \Omega \cap \Omega_h \\ \Delta_i = \Omega \setminus \Theta \\ \Delta_e = \Omega_h \setminus \Theta \\ \Gamma_i = \partial\Omega \cap \bar{\Delta}_i \\ \Gamma_e = \partial\Omega \cap \bar{\Delta}_e \end{cases}$$

Ces domaines sont grossièrement symbolisés sur la figure (5.1).

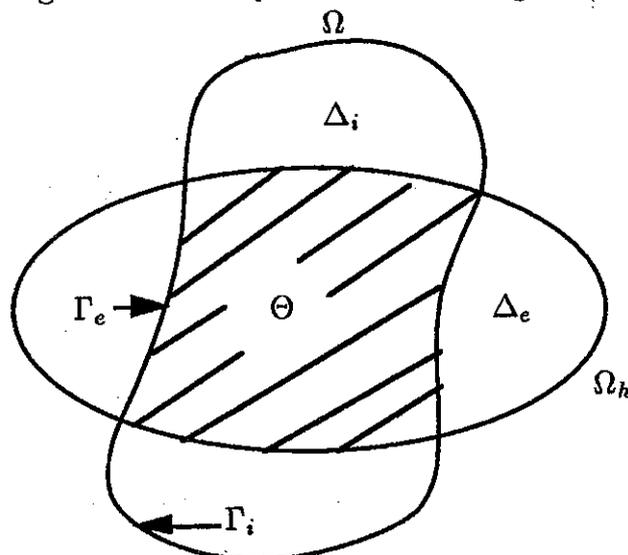


Figure 5.1

On note  $\vec{n} = \nu = (\nu_1, \nu_2)$  la normale extérieure unitaire de  $\partial\Omega$  et on pose :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \nu} \\ \partial_{\nu_L} = \frac{\partial}{\partial \nu_L} = \sum_{i,j=1}^2 \nu_i a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \partial_{\nu_{L^*}} = \frac{\partial}{\partial \nu_{L^*}} = \sum_{i,j=1}^2 \nu_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ A(\sigma) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x(\sigma)) \nu_i \nu_j \end{array} \right.$$

### 6. Preuve de la proposition 1

On décompose la preuve de la proposition 1 en six lemmes.

#### Lemme 6.1.

On a l'estimation suivante :

$$\lambda - \lambda_h = -\lambda^2 \ell^*((T - T_h)u) + O(h^{2k+2}).$$

*Preuve.*

On remarque que, pour tout  $w \in \text{Im}(I - \lambda T)$ , on a :

$$(6.1) \quad \ell^*(w) = 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \ell^*(u_h - \lambda_h T_h u_h) \\ &= \ell^*(u_h - \lambda T_h u_h) + \lambda_h \ell^*((T - T_h)u_h) + (\lambda - \lambda_h) \ell^*(T_h u_h) \\ &= \lambda_h \ell^*((T - T_h)u_h) + (\lambda - \lambda_h) \ell^*(T_h u_h) \text{ d'après (6.1).} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(6.2) \quad (\lambda - \lambda_h) \ell^*(T_h u_h) = -\lambda_h \ell^*((T - T_h)u_h)$$

On a également les deux estimations suivantes :

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \ell^*(T_h u_h) &= \ell^*(T_h u) - \ell^*(T_h(u - u_h)) \\ &= \frac{1}{\lambda} + O(h^{k+1}) \text{ d'après (4.4)} \end{aligned}$$

$$\ell^*((T - T_h)u_h) = \ell^*((T - T_h)u) - \ell^*((T - T_h)(u - u_h))$$

Or le dernier terme vérifie :

$$\begin{aligned} \ell^*((T - T_h)(u - u_h)) &= \int_{\Omega} (T^* - T_h^*) u^* (u - u_h) dx \\ &= O(h^{2k+2}) \text{ d'après (4.4) et (4.2)} \end{aligned}$$

Les égalités précédentes nous donnent donc :

$$\lambda - \lambda_h = -\lambda \lambda_h \ell^*((T - T_h)u) + O(h^{2k+2} + |\lambda - \lambda_h| h^{k+1}).$$

On obtient alors le lemme grâce aux estimations (4.2) et (4.5)  $\square$

On va maintenant décomposer l'intégrale obtenue suivant son domaine d'intégration.

**Lemme 6.2.**

On a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \ell^*((T - T_h)u) &= a_{\Delta_i}(Tu, T^*u^*) + a_{\Delta_e}(T_h u, T_h^* u^*) \\ &\quad + \int_{\Gamma_e} A(\sigma) [\partial_{\nu}(Tu)T_h^* u^* + \partial_{\nu}(T^* u^*)T_h u] d\sigma \\ &\quad + a_{\Theta}((T - T_h)u, (T^* - T_h^*)u^*). \end{aligned}$$

*Preuve.*

La formule de Green donne les deux égalités suivantes :

$$(6.4) \quad \begin{cases} a_{\Omega}(v, w) - \int_{\Omega} v L^* w dx = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu L^*} w v d\sigma \\ a_{\Omega}(w, v) - \int_{\Omega} L v w dx = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu L} v w d\sigma \end{cases}$$

On utilise la première égalité avec  $v = T_h u$  et  $w = T^* u^*$  et la seconde avec  $v = Tu$  et  $w = T_h^* u^*$ , on obtient alors que :

$$\begin{aligned} \ell^*(T_h u) &= a_{\Omega}(T_h u, T^* u^*) - \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu L^*}(T^* u^*) T_h u d\sigma \\ (6.6) \quad a_{\Omega}(Tu, T_h^* u^*) &= \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu L}(Tu) T_h^* u^* d\sigma + \int_{\Omega} u T_h^* u^* dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu L}(Tu) T_h^* u^* d\sigma + a_{\Omega_h}(T_h u, T_h^* u^*) \\ &\quad \text{par définition de } T_h. \end{aligned}$$

On sait que  $T_h u = 0$  sur  $\Gamma_i$ ; en utilisant la première égalité de (6.5) et la définition de  $T$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\ell^*((T - T_h)u) &= a_\Omega(Tu, T^*u^*) - \ell^*(T_h u) \\
&= a_\Omega((T - T_h)u, T^*u^*) + \int_{\Gamma_e} \partial_{\nu_{L^*}}(T^*u^*)T_h u \, d\sigma \\
&= a_\Omega((T - T_h)u, (T^* - T_h^*)u^*) + \int_{\Gamma_e} \partial_{\nu_{L^*}}(T^*u^*)T_h u \, d\sigma \\
&\quad + a_\Omega(Tu, T_h^*u^*) - a_\Omega(T_h u, T_h^*u^*) \\
&= a_\Theta((T - T_h)u, (T^* - T_h^*)u^*) + a_{\Delta_i}(Tu, T^*u^*) \\
&\quad + \int_{\Gamma_e} [\partial_{\nu_{L^*}}(T^*u^*)T_h u + \partial_{\nu_L}(Tu)T_h^*u^*] \, d\sigma \\
&\quad + a_{\Delta_e}(T_h u, T_h^*u^*) \quad \text{d'après (6.5)}.
\end{aligned}$$

On conclut la preuve du lemme en remarquant que :

$$\begin{cases} \partial_{\nu_{L^*}}(T^*u^*) = A(\sigma)\partial_\nu T^*u^* \\ \partial_{\nu_L}(Tu) = A(\sigma)\partial_\nu Tu \end{cases}$$

puisque  $Tu = T^*u^* = 0$  sur  $\partial\Omega$   $\square$

En utilisant le fait que  $\lambda Tu = u$  et  $\lambda T^*u^* = u^*$  et l'estimation

$$\|(T - T_h)u\|_{1,2,\Theta} + \|(T^* - T_h^*)u^*\|_{1,2,\Theta} \leq C h^k,$$

les deux lemmes précédents nous donnent donc :

$$\begin{aligned}
\lambda - \lambda_h &= -a_{\Delta_i}(u, u^*) - \lambda^2 a_{\Delta_e}(T_h u, T_h^*u^*) \\
(6.6) \quad &- \lambda \int_{\Gamma_e} A(\sigma) [\partial_\nu u^* T_h u + \partial_\nu u T_h^*u^*] \, d\sigma + O(h^{2k}).
\end{aligned}$$

Dans les trois lemmes suivants, on estime les termes  $a_{\Delta_i}(u, u^*)$  et  $a_{\Delta_e}(T_h u, T_h^*u^*)$  ainsi que l'intégrale.

**Lemme 6.3.**

On a l'estimation suivante :

$$a_{\Delta_i}(u, u^*) = - \int_{\Gamma_i} g(\sigma) d_h(\sigma) \, d\sigma + O(h^{2k+2})$$

avec  $g(\sigma) = A(\sigma) \partial_\nu u \partial_\nu u^*(x(\sigma))$ .

*Preuve.*

On va travailler avec la paramétrisation (3.9) de la frontière de  $\Omega_h$ . Tout point  $y$  de  $\Delta_i$  peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$y = x(\sigma) + \xi \vec{n}(\sigma) \text{ avec } \xi \in ]d_h(\sigma), 0[.$$

On écrit alors la formule de Taylor-Lagrange au point  $x(\sigma)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \frac{\partial u^*}{\partial x_j}(y) &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(\sigma)) \frac{\partial u^*}{\partial x_j}(x(\sigma)) + O(h^{k+1}) \text{ d'après le corollaire 3.1} \\ &= \nu_i \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu}(x(\sigma)) \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x(\sigma)) + O(h^{k+1}) \text{ car } u = 0 \text{ sur } \Gamma_i. \end{aligned}$$

On remarque que l'on a :

$$dx_1 dx_2 = \left(1 - \frac{\xi}{R(\sigma)}\right) d\sigma d\xi = (1 + O(h^{k+1})) d\sigma d\xi$$

où  $R(\sigma)$  est le rayon de courbure de  $\partial\Omega$  au point  $x(\sigma)$ . La deuxième égalité vient du corollaire 3.1. Finalement, on obtient que :

$$\begin{aligned} a_{\Delta_i}(u, u^*) &= \int_{\Gamma_i} \sum_{i,j=1}^2 \int_{d_h(\sigma)}^0 (a_{ij} \nu_i \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u^*}{\partial \nu} + O(h^{k+1})) d\xi d\sigma \\ &= - \int_{\Gamma_i} A(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x(\sigma)) d_h(\sigma) d\sigma + O(h^{2k+2}) \quad \square \end{aligned}$$

#### Lemme 6.4.

On a l'estimation suivante :

$$a_{\Delta_e}(T_h u, T_h^* u^*) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\Gamma_e} g(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma + O(h^{2k}).$$

*Preuve.*

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$(6.7) \quad \begin{cases} v_h = T_h u \\ v_h^* = T_h^* u^* \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v = T u \text{ sur } \Omega \\ v^* = T^* u^* \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

La frontière de  $\Omega$  étant régulière, on peut prolonger  $v$  et  $v^*$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  par des fonctions de classe  $C^{k+1}$ . En utilisant la bilinéarité de  $a_{\Delta_e}$ , on obtient :

$$(6.8) \quad \begin{aligned} a_{\Delta_e}(v_h, v_h^*) &= a_{\Delta_e}(v, v^*) + a_{\Delta_e}(v_h - v, v^*) + a_{\Delta_e}(v, v_h^* - v^*) \\ &\quad + a_{\Delta_e}(v_h - v, v_h^* - v^*) \end{aligned}$$

Une démonstration similaire à celle du lemme précédent nous donne :

$$(6.9) \quad a_{\Delta_e}(v, v^*) = \int_{\Gamma_e} \tilde{g}(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma + O(h^{2k+2}).$$

avec  $\tilde{g}(\sigma) = A(\sigma) \partial_\nu v \partial_\nu v^*(x(\sigma))$  donc  $\lambda^2 \tilde{g}(\sigma) = g(\sigma)$  et on obtient le premier terme de l'égalité donnée dans le lemme.

Montrons que les termes restants dans l'égalité (6.8) sont majorés par  $h^{2k}$ . On utilise d'abord la continuité de  $a_{\Delta_e}$  :

$$(6.10) \quad \begin{cases} |a_{\Delta_e}(v - v_h, v^*)| \leq C \|v - v_h\|_{1,2,\Delta_e} \|v^*\|_{1,2,\Delta_e} \\ |a_{\Delta_e}(v, v^* - v_h^*)| \leq C \|v^* - v_h^*\|_{1,2,\Delta_e} \|v\|_{1,2,\Delta_e} \\ |a_{\Delta_e}(v - v_h, v^* - v_h^*)| \leq C \|v - v_h\|_{1,2,\Delta_e} \|v^* - v_h^*\|_{1,2,\Delta_e} \end{cases}$$

On considère  $r_h v$  l'interpolation polynômiale de Lagrange d'ordre  $k$  de  $v$ . D'après Ciarlet-Raviart [7], on a alors :

$$(6.11) \quad \|v - r_h v\|_{1,2,\Omega_h} \leq C h^k$$

D'après (4.1), on a donc :

$$(6.12) \quad \|v_h - r_h v\|_{1,2,\Theta} \leq C h^k.$$

On utilise alors le lemme 3.3, car  $v_h - r_h v$  appartient à  $V_h$  :

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \|v_h - r_h v\|_{1,2,\Delta_e} &\leq C h^{\frac{k}{2}} \|v_h - r_h v\|_{1,2,\Theta} \\ &\leq C h^{\frac{3k}{2}} \text{ d'après (6.12)} \end{aligned}$$

On a également d'après Ciarlet-Raviart [7] :

$$\|v - r_h v\|_{1,\infty,\Omega \cup \Omega_h} \leq C h^k.$$

On en déduit immédiatement que :

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \|v - r_h v\|_{1,2,\Delta_e} &\leq (\text{Aire}(\Delta_e))^{\frac{1}{2}} \|v - r_h v\|_{1,\infty,\Delta_e} \\ &\leq C h^{\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$(6.15) \quad \|v - v_h\|_{1,2,\Delta_e} \leq C h^{\frac{3}{2}k}.$$

On a le même résultat pour  $v^* - v_h^*$ . On a également la majoration suivante :

$$\|v^*\|_{1,2,\Delta_e} \leq C (\text{Aire}(\Delta_e))^{\frac{1}{2}} \leq C h^{\frac{k+1}{2}}.$$

Elle est également vraie pour  $\|v\|_{1,2,\Delta_e}$ .

On reporte ces deux derniers résultats dans (6.10), ce qui donne :

$$\begin{cases} |a_{\Delta_e}(v - v_h, v^*)| \leq C h^{2k + \frac{1}{2}} \\ |a_{\Delta_e}(v, v^* - v_h^*)| \leq C h^{2k + \frac{1}{2}} \\ |a_{\Delta_e}(v - v_h, v^* - v_h^*)| \leq C h^{3k} \end{cases}$$

Les égalités (6.8) et (6.9) associées aux majorations données ci-dessus prouvent alors le lemme  $\square$

Il nous reste à estimer l'intégrale de bord.

**Lemme 6.5.**

On a les estimations suivantes :

(1)

$$\int_{\Gamma_e} A(\sigma) \partial_\nu(u^*) T_h u \, d\sigma = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_e} g(\sigma) d_h(\sigma) \, d\sigma + O(h^{2k+1}).$$

(2)

$$\int_{\Gamma_e} A(\sigma) \partial_\nu(u) T_h^* u^* \, d\sigma = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_e} g(\sigma) d_h(\sigma) \, d\sigma + O(h^{2k+1}).$$

*Preuve.*

On va montrer le premier point, le raisonnement étant le même pour le second. Les notations utilisées sont celles des lemmes précédents. La fonction  $v_h$  est nulle sur  $\partial\Omega_h$ , d'où, en reprenant la paramétrisation (3.9) :

$$\begin{aligned} v_h(x(\sigma)) &= -d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma) \nabla v_h(y) \quad \text{avec } y \in ]x(\sigma), x_h(\sigma)[ \\ &= -d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma) \nabla v_h(x(\sigma)) + d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma) (\nabla v_h(x(\sigma)) - \nabla v_h(y)) \\ &= -d_h(\sigma) \partial_\nu v_h(x(\sigma)) + O\left(h^{k+1} \left| \vec{n}(\sigma) (\nabla v_h(x(\sigma)) - \nabla v_h(y)) \right| \right) \end{aligned}$$

d'après l'estimation de  $d_h$  donnée au corollaire 3.1

or on a également :

$$\begin{aligned} \left| \vec{n}(\sigma) (\nabla v_h(x(\sigma)) - \nabla v_h(y)) \right| &\leq \left| \vec{n}(\sigma) (\nabla v_h(x(\sigma)) - \nabla v(x(\sigma))) \right| \\ &\quad + \left| \vec{n}(\sigma) (\nabla v(x(\sigma)) - \nabla v(y)) \right| \\ &\quad + \left| \vec{n}(\sigma) (\nabla v_h(y) - \nabla v(y)) \right| \\ &\leq C (\|v - v_h\|_{1,2,\Delta_e} + |x(\sigma) - y|) \\ &\leq C h^{k+1} \text{ d'après (6.15) et le corollaire 3.1} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$v_h(x(\sigma)) = -d_h(\sigma) \partial_\nu v_h(x(\sigma)) + O(h^{2k+2}).$$

On a donc :

$$(6.16) \quad \int_{\Gamma_e} A(\sigma) \partial_\nu(u^*) T_h u \, d\sigma = - \int_{\Gamma_e} A(\sigma) \partial_\nu(u^*) d_h(\sigma) \partial_\nu v_h(x(\sigma)) \, d\sigma + O(h^{2k+2})$$

On a rappelé en (4.1) que  $\|v - v_h\|_{1,2,\Theta} = O(h^{k+1})$  donc :

$$\partial_\nu v_h(x(\sigma)) = \partial_\nu v(x(\sigma)) + O(h^{k+1}).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} v &= Tu = \frac{1}{\lambda} u \\ d_h(\sigma) &= O(h^{k+1}) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$d_h(\sigma) \partial_\nu v_h(x(\sigma)) = \frac{1}{\lambda} d_h(\sigma) \partial_\nu u(x(\sigma)) + O(h^{2k+2})$$

Il suffit alors d'utiliser l'égalité précédente dans (6.16) pour obtenir le lemme  $\square$

Ces trois derniers lemmes prouvent la première proposition. En effet, on a vu que en (6.6) que :

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda_h &= -a_{\Delta_i}(u, u^*) - \lambda^2 a_{\Delta_e}(T_h u, T_h^* u^*) \\ &\quad - \lambda \int_{\Gamma_e} A(\sigma) [\partial_\nu(u^*) T_h u + \partial_\nu(u) T_h^* u^*] d\sigma + O(h^{2k}). \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda_h &= \int_{\Gamma_i} g(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma + O(h^{2k+2}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_e} g(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma + O(h^{2k}) \\ &\quad - 2 \int_{\Gamma_i} g(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma + O(h^{2k+1}) \\ &= \int_{\partial\Omega} g(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma + O(h^{2k}) \end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer la proposition 2.

## 7. Preuve de la proposition 2

Le premier paragraphe est consacré à un rappel sur les points de quadrature de Gauss-Lobatto ; dans le deuxième, on montre un résultat technique. La preuve de la proposition 2 est faite dans le dernier paragraphe.

### 7.1 Rappels.

On a noté  $\theta_0 = 0, \theta_1, \dots, \theta_k = 1$  les  $k + 1$  points de quadrature de Gauss-Lobatto de l'intervalle  $[0, 1]$  et on pose :

$$(7.1.1) \quad G_i(f) = \sum_{j=0}^k l_j \lambda_j f(\sigma_j + \theta_j l_i)$$

où les coefficients  $\lambda_i$  sont définis de manière unique par :

$$(7.1.2) \quad G_i(p) = \int_0^1 p(x) dx \text{ pour tout } p \in P_{2k-1}$$

On rappelle que  $\lambda_j > 0$  et  $\sum_{j=0}^k \lambda_j = 1$ . On définit également :

$$(7.1.3) \quad E_i(f) = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} f(\sigma) d\sigma - G_i(f),$$

alors, d'après le théorème de Péano, on a :

$$(7.1.4) \quad \text{Pour tout } f \in C^{2k}([\sigma_i, \sigma_{i+1}]) \quad |E_i(f)| \leq C l_i^{2k+1} |f|_{2k, \infty, \Gamma}.$$

(voir par exemple : A.H Stroud-D. Secrest [8])

### 7.2 Preuve de la proposition 2.

On pose  $\gamma_i = [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$  et on considère une fonction  $\varphi$  appartenant à  $W^{k-1,1}(\partial\Omega)$ , alors pour tout  $\sigma \in \gamma_i$ , on a :

$$(7.2.1) \quad \varphi(\sigma) = p_i(\sigma) + \int_{\sigma_i}^{\sigma} \varphi^{(k-1)}(s) \frac{(\sigma-s)^{k-2}}{(k-2)!} ds$$

où  $p_i$  est le polynôme de Taylor de degré  $k-2$  de la fonction  $\varphi$  au point  $\sigma_i$ .  
On en déduit en particulier :

$$(7.2.2) \quad \|\varphi - p_i\|_{0, \infty, \gamma_i} \leq C h^{k-2} |\varphi|_{k-1, 1, \gamma_i}.$$

En utilisant les notations définies en (4.6) et (7.1.3), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} \varphi(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma &= \int_{\gamma_i} (\varphi - p_i)(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma + E_i(p_i d_h) \\ &\quad + l_i \sum_{j=0}^k \lambda_j (p_i d_h)(\sigma_{i,j}). \end{aligned}$$

D'après (7.1.4), (7.2.2) et le corollaire 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_i} \varphi(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma \right| &\leq C \left( h^{2k} |\varphi|_{k-1, 1, \gamma_i} + l_i h^{2k} |p_i d_h|_{2k, \infty, \gamma_i} \right. \\ &\quad \left. + l_i \text{Max}_{j=0, \dots, k} |(p_i d_h)(\sigma_{i,j})| \right) \\ &\leq C \left( h^{2k} |\varphi|_{k-1, 1, \gamma_i} \right. \\ &\quad \left. + l_i \|\varphi\|_{k-2, \infty, \gamma_i} \left( h^{2k} |d_h|_{2k, \infty, \gamma_i} + \text{Max}_{j=0, \dots, k} |d_h(\sigma_{i,j})| \right) \right). \end{aligned}$$

car on a :

$$\begin{cases} \text{Max}_{j=0, \dots, k} |p_i(\sigma_{i,j})| \leq \|p_i\|_{0, \infty, \gamma_i} \leq C \|\varphi\|_{k-2, \infty, \gamma_i} \\ |p_i d_h|_{2k, \infty, \gamma_i} \leq C \|\varphi\|_{k-2, \infty, \gamma_i} \|d_h\|_{2k, \infty, \gamma_i} \end{cases}$$

En sommant sur tous les intervalles  $\gamma_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma) d_h(\sigma) d\sigma \right| &\leq C \left( h^{2k} |\varphi|_{k-1, 1, \partial\Omega} \right. \\ &\quad \left. + L \|\varphi\|_{k-2, \infty, \partial\Omega} \left( \text{Max}_{j,i} |d_h(\sigma_{i,j})| + h^{2k} \text{Max}_i \|d_h\|_{2k, \infty, \gamma_i} \right) \right). \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve de la proposition 2, il suffit donc de montrer :

**Lemme 7.1.**

Il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour tout  $i$ , on ait :

$$\begin{cases} \|d_h\|_{2k, \infty, \gamma_i} \leq C \\ |d_h(\sigma_{i,j})| \leq C (|(x - x_h)(\sigma_{i,j})| + h^{2k+2}) \end{cases}$$

*Preuve.*

On a construit deux représentations paramétriques de  $\partial\Omega_h$  :

$$s \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}] \rightarrow x_h(s) = F_K\left(\frac{s - \sigma_i}{l_i}, 0\right)$$

$$\sigma \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}] \rightarrow \tilde{x}_h(\sigma) = x(\sigma) + d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma)$$

On peut donc définir un homéomorphisme :

$$f : \sigma \in [0, L] \rightarrow s = f(\sigma) \in [0, L]$$

par :

$$(7.2.1) \quad x_h(s) = \tilde{x}_h(\sigma) = x(\sigma) + d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma)$$

et on a alors :

$$(7.2.2) \quad d_h(\sigma) = ((x_h(s) - x(\sigma)) \cdot \vec{n}(\sigma)).$$

On a déjà vu que  $x_h$  ainsi que toutes ses dérivées étaient bornées indépendamment de  $h$  et de  $i$  ; pour avoir la première inégalité, il suffit de montrer que l'application  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, L]$  et a toutes ses dérivées bornées indépendamment de  $h$  et de  $i$ . On va d'abord montrer, en utilisant un développement de Taylor, que :

Il existe  $C$  indépendant de  $i$  et de  $h$  tel que :

$$(7.2.3) \quad |\sigma - s| \leq C h^{k+1}.$$

D'après (7.2.1), on a :

$$(7.2.4) \quad \begin{aligned} x_h(s) - x(s) &= x(\sigma) - x(s) + d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma) \\ &= (s - \sigma) \vec{t}(\sigma) + \left( \frac{(s - \sigma)^2}{2R(\sigma)} + d_h(\sigma) \right) \vec{n}(\sigma) \\ &\quad + O(|s - \sigma|^3) \end{aligned}$$

où  $R(\sigma)$  représente le rayon de courbure de  $\partial\Omega$  au point  $x(\sigma)$ .

Les majorations de  $\|x - x_h\|_{0,\infty,\partial\Omega}$  et de  $d_h(\sigma)$  par  $Ch^{k+1}$  obtenues au lemme 3.1 et au corollaire 3.1 donnent alors l'estimation (7.2.3).

Montrons que  $f$  est de classe  $C^\infty$ . D'après (7.2.1), on a :

$$f(\sigma) = l_i F_K^{-1}(x(\sigma) + d_h(\sigma) \vec{n}(\sigma)) + \sigma_i$$

Or on a supposé que la triangulation était  $k$ -régulière, donc  $F_K$  est un  $C^k$ -difféomorphisme ; elle appartient de plus à  $(P_k)^2$ . On en déduit que  $F_K$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme. Sachant que  $d_h$  est également régulière, on a bien la régularité annoncée pour  $f$ .

Pour montrer que toutes les dérivées de  $f$  sont bornées indépendamment de  $h$  sur  $[0, L]$ , on multiplie l'équation (7.2.1) par  $x'(\sigma) = \vec{t}(\sigma)$  et on a :

$$(7.2.5) \quad \phi(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} (x(\sigma) \cdot x'(\sigma)) = (x_h(s) \cdot x'(\sigma))$$

où  $\phi$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $[0, L]$  ne dépendant pas de  $h$ . En dérivant par rapport à  $\sigma$ , on obtient :

$$(7.2.6) \quad \phi'(\sigma) = f'(\sigma)(x'_h(s) \cdot x'(\sigma)) + (x_h(s) \cdot x''(\sigma))$$

Or, d'après l'estimation de  $s - \sigma$  donnée en (7.2.3), on a :

$$\begin{aligned} (x'_h(s) \cdot x'(\sigma)) &= (x'(\sigma) \cdot x'(\sigma)) + (x'(\sigma) \cdot x'(s) - x'(\sigma)) \\ &\quad + (x'(\sigma) \cdot x'_h(s) - x'(s)) \\ &= 1 + O(h^k) \end{aligned}$$

car  $\|x' - x'_h\|_{0,\infty,\partial\Omega} = O(h^k)$  d'après le lemme 3.1. On en déduit que, pour  $h$  suffisamment petit,

$$(x'_h(s) \cdot x'(\sigma)) \neq 0$$

or  $x_h$  est bornée indépendamment de  $h$  ainsi que toutes ses dérivées sur  $[0, L]$  donc  $f'$  l'est aussi. On obtient alors le résultat, grâce à la remarque précédente et à un raisonnement par récurrence, en dérivant l'équation (7.2.6) par rapport à  $\sigma$ . Les dérivées de  $f$  sont donc bornées indépendamment de  $h$  sur  $[0, L]$  et l'égalité (7.2.2) nous donne alors la première inégalité du lemme. On pose :

$$(7.2.7) \quad s_{i,j} = f(\sigma_{i,j}).$$

On reprend l'égalité (7.2.2) aux points  $s_{i,j}$  et  $\sigma_{i,j}$  :

$$\begin{aligned}
 d_h(\sigma_{i,j}) &= ((x_h(s_{i,j}) - x(\sigma_{i,j})) \cdot \vec{n}(\sigma_{i,j})) \\
 &= ((x_h(\sigma_{i,j}) - x(\sigma_{i,j})) \cdot \vec{n}(\sigma_{i,j})) \\
 (7.2.8) \quad &\quad + ((x_h(s_{i,j}) - x_h(\sigma_{i,j})) \cdot \vec{n}(\sigma_{i,j})) \\
 &\quad + ((x(\sigma_{i,j}) - x(s_{i,j})) \cdot \vec{n}(\sigma_{i,j}))
 \end{aligned}$$

or on a :

$$\begin{aligned}
 x_h(s_{i,j}) - x_h(\sigma_{i,j}) &= (s_{i,j} - \sigma_{i,j})x'_h(\sigma_{i,j}) + O(h^{2k+2}) \\
 &\text{d'après l'estimation de } s - \sigma \text{ donnée en (7.2.3)} \\
 &= (s_{i,j} - \sigma_{i,j})x'(\sigma_{i,j}) + O(h^{2k+2}) \\
 &\quad + (s_{i,j} - \sigma_{i,j})(x'_h(\sigma_{i,j}) - x'(\sigma_{i,j})) \\
 &= (s_{i,j} - \sigma_{i,j})x'(\sigma_{i,j}) + O(h^{2k+1}) \\
 &\quad \text{car } \|x - x_h\| = O(h^k)
 \end{aligned}$$

On reporte la dernière égalité dans (7.2.8) et on obtient :

$$d_h(\sigma_{i,j}) = ((x_h(\sigma_{i,j}) - x(\sigma_{i,j})) \cdot \vec{n}(\sigma_{i,j})) + O(h^{2k+1})$$

car  $x'(\sigma_{i,j}) = \vec{t}(\sigma_{i,j})$ .  $\square$

*Remarque.* D'après (7.2.8), on aurait pu remplacer les hypothèses  $(H_2)$  et  $(H)$  par l'hypothèse  $(H_3)$  suivante :

$$(H_3) \left\{ \begin{array}{l} |((x_h(\sigma_{i,j}) - x(\sigma_{i,j})) \cdot \vec{n}(\sigma_{i,j}))| \leq C h^{2k} \\ |x_h(\sigma_{i,j}) - x(\sigma_{i,j})| \leq C l_i^{k+1} \end{array} \right.$$

On va, dans le paragraphe suivant, construire une triangulation régulière qui vérifie l'hypothèse  $(H)$  et  $(H_2)$  pour  $k = 2$  et  $k = 3$ .

## 8. Exemples

On reprend les notations du paragraphe 3. On considère un triangle  $K$  de la triangulation  $\mathcal{K}_h$  ayant un côté courbe  $\Gamma_h$  dans  $\partial\Omega_h$  et on note  $A$  et  $B$  les extrémités de  $\Gamma_h$ . On appelle  $\Gamma$  la portion de  $\partial\Omega$  comprise entre ces deux points. On appelle  $O$  le milieu de  $A$  et  $B$ .

Pour  $k = 2$ , on va détailler deux possibilités de construction de l'arc  $\Gamma_h$  ; pour  $k = 3$ , on donne juste une indication, le principe étant le même.

8.1  $k = 2$ .

## 8.1.1 Préliminaires.

Les points de quadrature de Gauss-Lobatto du segment  $[0, 1]$  pour  $k = 2$  sont  $0, 1/2, 1$ . On suppose que  $A$  et  $B$  ont pour abscisse curviligne  $-l/2$  et  $l/2$ . On note :

$$(8.1.1) \quad C' = x(0).$$

Si on définit  $\Gamma_h$  par la donnée des trois points  $A, B$  et  $C'$ , alors l'hypothèse  $(H)$  est trivialement vérifiée et le triangle  $K$  est  $k$ -régulier, mais  $C'$  n'est pas facile à calculer si l'équation de  $\Gamma$  n'est pas donnée paramétrée par son abscisse curviligne.

On peut également considérer le point  $C$  intersection de  $\Gamma$  et de la médiatrice du segment  $[A, B]$ . Montrons que ce point vérifie l'hypothèse  $(H)$ ; on doit avoir :

$$(8.1.2) \quad \overrightarrow{CC'} = O(h^4).$$

On note :

$$(8.1.3) \quad \begin{cases} \vec{t}(\sigma) = \frac{dx(\sigma)}{d\sigma} & \text{avec } M \in \Gamma \\ C = x(\sigma_1) \end{cases}$$

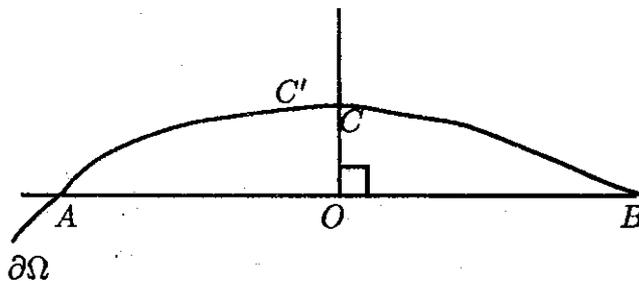


Figure 8.1.1

**Lemme 8.1.1.**

Avec les notations précédentes, on a :

$$(1) \quad \sigma_1 = O(h^4)$$

$$(2) \quad \overrightarrow{CC'} = O(h^4).$$

*Preuve.*

$\sigma_1$  est définie par  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

On utilise le développement de la fonction  $x$  en 0 pour  $\sigma = \sigma_1, -l/2$  ou  $l/2$  :

$$x(\sigma) = x(0) + \sigma x'(0) + \frac{\sigma^2}{2} x''(0) + \frac{\sigma^3}{6} x'''(0) + O(l^4)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= x(\sigma_1) - \frac{1}{2} \left( x\left(-\frac{l}{2}\right) + x\left(\frac{l}{2}\right) \right) \\ &= \sigma_1 x'(0) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - l^2) x''(0) + \frac{1}{6} \sigma_1^3 x'''(0) + O(l^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= x\left(\frac{l}{2}\right) - x\left(-\frac{l}{2}\right) \\ &= l \left( x'(0) + \frac{1}{36} x'''(0) + O(l^4) \right) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(8.1.4) \quad \sigma_1 + \frac{1}{6} \sigma_1^3 + \frac{1}{36} \sigma_1 l^2 (x'(0), x'''(0)) = O(l^4) = 0.$$

On en déduit que  $\sigma_1 = O(l^4)$ . On a remarqué que  $l = O(h)$  donc on a prouvé le premier point.

On a également :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CC'} &= x(\sigma_1) - x(0) \\ &= \sigma_1 \overrightarrow{t}(0) + O(h^8), \end{aligned}$$

ce qui montre le deuxième point  $\square$

$C$  vérifie l'hypothèse (H) ; il vérifie également les hypothèses donnant une triangulation  $k$ -régulière telle qu'elles sont définies dans l'article de Ciarlet-Raviart [6]. On remarque que tout point  $C''$  tel que  $\overrightarrow{C'C''} = O(h^4)$  conviendra également ; on va alors donner une autre possibilité pour choisir le troisième point permettant de définir  $\Gamma_h$ .

On note  $D$  et  $E$  les deux nœuds extérieurs de la triangulation les plus proches respectivement de  $A$  et  $B$ . Ils sont représentés, de manière très symbolique, sur la figure (8.1.2).

On appelle  $p$  un polynôme de degré trois, défini plus précisément dans le paragraphe suivant, passant par les points  $A, B, D$  et  $E$  et on note  $C'''$  l'intersection de  $p$  avec la médiatrice du segment  $[A, B]$  ; par construction,  $C'''$  vérifie  $\overrightarrow{C'C'''} = O(h^4)$  et on peut facilement le calculer.

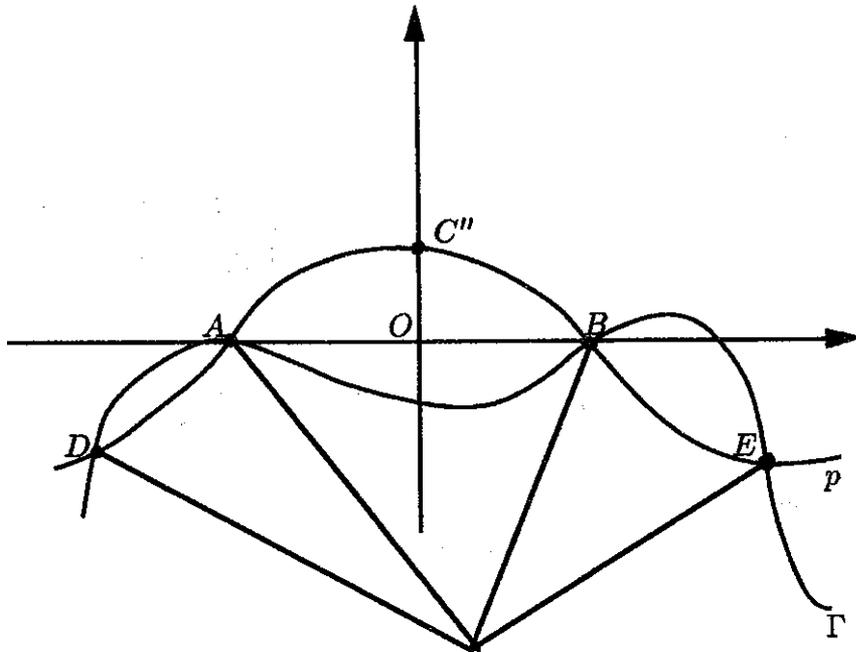
8.1.2 Calcul de  $C''$ .

Figure 8.1.2

On va donner l'algorithme permettant de calculer  $C''$ . On travaille d'abord dans le repère orthonormé défini par la figure (8.1.2) et on note  $(x_M, y_M)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans ce repère. On a, en particulier :

$$\begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B = 0 \\ y_{C''} = 0 \end{cases}$$

On définit deux polynômes  $p_D$  et  $p_E$  par :

$$(8.1.5) \quad \begin{cases} p_D(x) = \frac{(x - x_E)(x - x_A)(x - x_B)}{(x_D - x_E)(x_D - x_A)(x_D - x_B)} \\ p_E(x) = \frac{(x - x_D)(x - x_A)(x - x_B)}{(x_E - x_D)(x_E - x_A)(x_E - x_B)} \end{cases}$$

On vérifie alors que  $C''$  est défini par :

$$(8.1.6) \quad x_{C''} = y_D p_D(0) + y_E p_E(0).$$

On travaille maintenant dans le repère d'origine supposé orthonormé et on note  $(x'_M, y'_M)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans ce repère ; on peut alors donner un algorithme de calcul :

(1) **Changement de repère :**

$$\alpha = \frac{x'_O - x'_A}{h/2} \quad \beta = \frac{y'_O - y'_A}{h/2}$$

$$f(x, y) = \beta(x - x'_O) + \alpha(y - y'_O)$$

$$g(x, y) = \alpha(x - x'_O) - \beta(y - y'_O)$$

$$\begin{cases} x_E = g(x'_E, y'_E) \\ y_E = f(x'_E, y'_E) \end{cases} \quad \begin{cases} x_D = g(x'_D, y'_D) \\ y_D = f(x'_D, y'_D) \end{cases}$$

(2) **Égalité (8.1.6) :**

$$\begin{cases} p(x, y, z, t) = \frac{h^2}{4(x-y)} \left[ \frac{xz}{x^2 - h^2/4} - \frac{yt}{y^2 - h^2/4} \right] \\ c = p(x_D, x_E, y_D, y_E) \end{cases}$$

(3) **Résultat :**

$$\begin{cases} x'_{C''} = \beta c + x'_O \\ y'_{C''} = \alpha c + y'_O \end{cases}$$

*Remarque.* Pour  $k = 2$ , d'après les résultats donnés par Ciarlet- Raviart [6], la triangulation pourra être  $k$ -régulière si on a  $\| \overrightarrow{OC} \| = O(h^2)$  ; on construit ensuite les deux autres côtés de manière adéquate.

### 8.2 $k = 3$ .

Les points de quadrature de Gauss-Lobatto du segment  $[0, 1]$  pour  $k = 3$  sont  $0, \alpha = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}), \beta = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}), 1$ . On note :

$$\begin{cases} B = x(\alpha l) \\ C = x(\beta l) \end{cases}$$

On remarque alors que tous points  $B'$  et  $C'$  vérifiant :

$$\begin{cases} \| \overrightarrow{BB'} \| = O(h^6) \\ \| \overrightarrow{CC'} \| = O(h^6) \end{cases}$$

permettent de construire un arc  $\Gamma_h$  vérifiant l'hypothèse  $(H)$ . On considère alors un polynôme  $p$  de degré cinq qui passe par six nœuds successifs et extérieurs de la triangulation et on note  $B'$  (respectivement  $C'$ ) l'intersection de  $p$  avec la droite orthogonale à  $(A, B)$  passant par le point  $\alpha A + (1 - \alpha)B$  (respectivement  $\beta A + (1 - \beta)B$ ).

Ces points permettent de définir un arc  $\Gamma_h$  ; on peut ensuite construire un triangle qui vérifiera les hypothèses nécessaires à la  $k$ -régularité.

## Bibliographie

### Références

- [1] S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Van Nostrand Mathematical Studies 2, 1965.
- [2] I. Babuška, J.E Osborn, *Eigenvalue Problems* (P.G Ciarlet, J.L Lyons, eds.), Handbook of Numerical Analysis, vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [3] U. Banerjee, *A Note on the Effect of Numerical Quadrature in Finite Element Eigenvalue Approximation*, Numer. Math. **61** (1992), 145–152.
- [4] U. Banerjee, J.E Osborn, *Estimation in the Effect of Numerical Integration in Finite Element Eigenvalue Approximation*, Numer. Math. **56** (1990), 735–762.
- [5] P.G Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [6] P.G Ciarlet, P.A Raviart, *The Combined Effect of Curved Boundaries and Numerical Integration in Isoparametric Finite Element Methods*, A.K.Aziz ed, Acad. Press (1973), 409–474.
- [7] ———, *Interpolation over Curved Elements, with Applications to Finite Element Methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **1** (1972), 217–249.
- [8] A.H Stroud, D. Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, Engelwood Cliffs, New-York, 1966.
- [9] J.E Osborn, *Spectral Approximation for Compact Operators*, Mathematics of Computation **29** (1975), 712–725.
- [10] M.Zlámal, *Curved Elements in the Finite Element Method I*, SIAM Journal on Numerical Analysis **10** (1973), 229–240.
- [11] ———, *Curved Elements in the Finite Element Method II*, SIAM Journal on Numerical Analysis **11** (1974), 347–368.