Université de Rennes I
UFR Mathématiques
Feuille de TD n°3

Licence pluridisciplinaire
UE AMNU
Année 2001-2002

INTERPOLATION POLYNÔMIALE

Exercice n°1

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1) Déterminer le polynôme $L_1(x)$ de degré 1 qui coïncide avec f aux points a et b.
On note $e_1(x) = |f(x) - L_1(x)|$ l'erreur commise au point x.

2) Soit A une constante réelle ; on pose $g(x) = f(x) - L_1(x) - A(x-a)(x-b)$. Vérifier qu'on a $g(a) = g(b) = 0$. Soit $\tilde{x} \in]a,b[$. Montrer qu'on peut choisir la constante A pour que g possède $\tilde{x}$ comme troisième racine.

3) On suppose A définie comme précédemment. Montrer qu'il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $g^{(2)}(\alpha) = 0$; en déduire $A = \dfrac{1}{2} f^{(2)}(\alpha)$.

4) On pose $M_2 = \sup\{|f^{(2)}(t)| \mid t \in [a,b]\}$; montrer que, pour tout $\hat{x} \in [a,b]$, on a

$$e_1(\hat{x}) \leq \frac{M_2}{2}(\hat{x} - a)(b - \hat{x})$$

puis que $e_1(x) \leq \dfrac{M_2}{8}(b-a)^2$ pour tout $x \in [a,b]$.

Exercice n°2

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$.

1) Déterminer le polynôme $L_2(x)$ de degré 2 qui coïncide avec f aux points a, $(a+b)/2$ et b.
On note $e_2(x) = |f(x) - L_2(x)|$ l'erreur commise au point x et
$M_3 = \sup\{|f^{(3)}(t)| \mid t \in [a,b]\}$.

2) En procédant comme précédemment, montrer que, pour tout $x \in [a,b]$, on a les inégalités :

$$e_2(x) \leq \frac{M_3}{3!}|(x-a)(x-b)(x - \frac{a+b}{2})|$$
$$e_2(x) \leq \frac{M_3}{216}\sqrt{3}(b-a)^3.$$

3) On choisit maintenant trois points x_1, x_2 et x_3 quelconques et distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a,b]$. On considère le polynôme $\mathcal{L}_2(x)$ de degré 2 qui coïncide avec f aux points x_1, x_2 et x_3. Montrer que, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|f(x) - \mathcal{L}_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|.$$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 3}$

On considère deux réels a et b tels que $a < b$. On note $\mathcal{P}_3$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1) Montrer qu'il existe des polynômes p_a, p_b, q_a, et q_b de $\mathcal{P}_3$ tels que

$$p_a(a) = p_b(b) = 1,\ p_a(b) = p'_a(a) = p'_a(b) = p_b(a) = p'_b(a) = p'_b(b) = 0$$
$$q'_a(a) = q'_b(b) = 1,\ q_a() = q_a(b) = q'_a(b) = q_b(a) = q'_b(a) = q_b(b) = 0$$

Expliciter ces polynômes. Montrer que $\{p_a, p_b, q_a, q_b\}$ est une base de $\mathcal{P}_3$.

2) Etant donné une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathcal{P}_3$ tel que

$$P(a) = f(a), P(b) = f(b), P'(a) = f'(a), P'(b) = f'(b).$$

Exprimer ce polynôme dans la base $\{p_a, p_b, q_a, q_b\}$.

3) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$. On note $M_4 = \sup\{|f^{(4)}(x)| \mid x \in [a, b]\}$. Montrer que, pour $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^4}{384} M_4(f), |f'(x) - P'(x)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} M_4(f)$$
$$|f''(x) - P''(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_4(f), |f^{(3)}(x) - P^{(3)}(x)| \leq (b-a) M_4(f)$$

Indication : on pourra montrer que P' est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f' en trois points de $[a, b]$.