
NOM : Prénom :
NOM : Prénom :

UNIVERSITE DE RENNES I
U.F.R. de Mathématiques

Licence pluridisciplinaire
U.E. AMNU

Contrôle de travaux pratiques

jeudi 3 mai 2001

Durée : 2 heures

Créer le répertoire **TP-exam** dans votre dossier **AMNU** et s'y positionner pour regrouper tous les fichiers utiles. Y lancer **MATLAB**.

Le sujet comporte quatre pages.

A la fin de la séance, quitter **MATLAB**. Avant de quitter la salle, rendre cet énoncé-questionnaire. Aucune impression n'est nécessaire.

PARTIE I

Résolution d'équations non linéaires

On se donne une fonction numérique f définie sur \mathbb{R} et on s'intéresse au problème de l'approximation numérique des solutions de l'équation $f(x) = 0$ au moyen de suites récurrentes (x_n) .

On donne la procédure **MATLAB** suivante :

```
function [X,iter]=Fauspos(f,x0,x1,epsilon,itermax)
err=10;iter=0;
while (err>epsilon & iter<itermax)
iter=iter+1;y=x1;
x1=x1-(feval(f,x1)*(x1-x0)/(feval(f,x1)-feval(f,x0)));
x0=y;
err=abs(x0-x1);
end
X=x1;
```

1. Ecrire, sous forme d'une suite récurrente, l'algorithme mathématique réalisé par cette fonction :

2. On définit une fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x \ln x$.
Lancer l'algorithme précédent avec $x_0 = 2$, $x_1 = 1.1$, $\text{epsilon} = 10^{-5}$.

$$X = \boxed{} \quad \text{iter} = \boxed{}$$

3. On obtient une approximation de l'ordre de convergence en calculant

$$t_n = \frac{\ln |x_{n+1} - x_n|}{\ln |x_n - x_{n-1}|}$$

où $n + 1$ est le nombre d'itérations trouvé.

Modifier la fonction `Fauspos` pour faire ce calcul :

Effectuer ce calcul : $t_n = \boxed{}$

PARTIE II

Intégration numérique

On travaillera avec le format `format long` pour obtenir des résultats avec huit décimales.

1. Présentation rapide des deux méthodes

- a. La méthode des trapèzes

On considère une fonction numérique f de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . Soit n un entier naturel non nul. On pose $x_i = a + (b - a)i/n$ pour $i = 0$ à n . On approche l'intégrale entre x_i et x_{i+1} de f par l'aire du trapèze de sommets $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. On appelle $T(f, a, b, n)$ la somme de ces aires et on obtient :

$$T(f, a, b, n) = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{i}{n}\right) \right].$$

On a alors l'estimation d'erreur suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(f, a, b, n) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

- b. La méthode de Simpson

On considère une fonction numérique f de classe \mathcal{C}^4 sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . Soit n un entier naturel non nul. On pose $x_i = a + (b - a)i/n$ pour $i = 0$ à n . On approche l'intégrale entre x_i et x_{i+1} de f par l'intégrale du polynôme du second degré P qui vérifie $P(x_i) = f(x_i)$, $P(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ et $P(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2})$. On appelle $S(f, a, b, n)$ la somme de ces aires et on obtient :

$$S(f, a, b, n) = \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{i}{n}\right) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{2i+1}{2n}\right) \right].$$

On a alors l'estimation d'erreur suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(f, a, b, n) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

2. Ecriture des fonctions

On donne la fonction permettant le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ par la méthode des trapèzes.

```
function y = Trapez(f,a,b,n)
x=linspace(a,b,n+1) ;
y=(b-a)/(2*n)*(sum(feval(f,[a b]))+2*sum(feval(f,x(2:n)))) ;
```

Les variables d'entrée de la fonction `Trapez` sont (F, a, b, n) où a et b sont les bornes de l'intervalle, $F.m$ le fichier dans lequel est programmé la fonction f et n le nombre d'intervalles. On appellera donc cette fonction par `Trapez('F', a, b, n)`. (*Remarquer les apostrophes encadrant F, il s'agit d'un argument chaîne de caractères*)

Les variables d'entrée de la fonction `Simpson` sont de même $(F, a, b, n/2)$ où $n/2$ est le nombre d'intervalles. Ecrire de même une fonction `Simpson.m` permettant le calcul numérique de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ par la méthode de Simpson avec $n+1$ points équidistants, c'est-à-dire le calcul de $S(f, a, b, n)$.

3. Jeux de données

On s'intéresse à la précision des méthodes des trapèzes et de Simpson, avec points équidistants, pour le calcul de l'intégrale suivante :

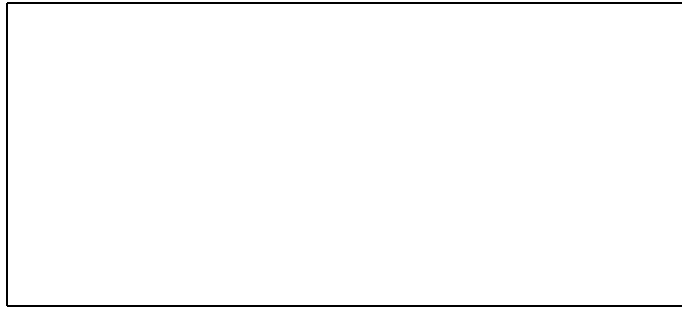
$$\int_0^1 \exp(-x^2) dx = 0.74682413281242702 \dots$$

Créer une fonction `Fctexp.m` permettant le calcul de la fonction que l'on va intégrer. La tracer sur l'intervalle d'intégration.

Fonction MATLAB permettant le calcul de $g(x) = \exp(-x^2)$ appelée `Fctexp` :

Script pour obtenir son graphique :

Graphique obtenu :



4. Comparaison des deux méthodes

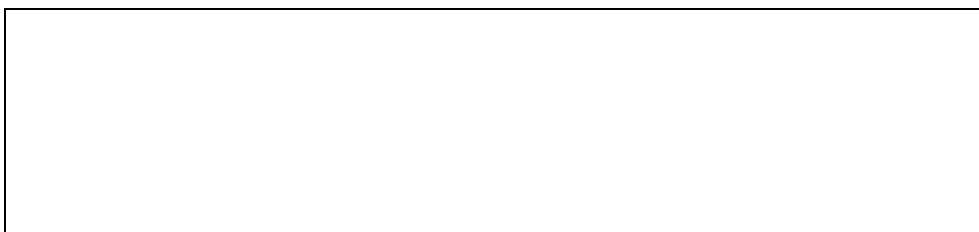
On complètera le tableau suivant, dans lequel le taux sera calculé selon la formule $\log(e_{n/2}/e_n)/\log(2)$ où e_n est l'erreur relative obtenue dans le calcul avec n intervalles pour Trapez, $n/2$ intervalles pour Simpson.

$\int_0^1 \exp(-x^2)dx$	Méthode des trapèzes		Méthode de Simpson	
	erreur relative	taux	erreur relative	taux
2		<i>non défini</i>		<i>non défini</i>
4				
8				
16				
32				
64				

Donner un script permettant le calcul d'une de ces lignes (au moins) :



Expliquer la signification théorique de ce taux :



Fin de l'énoncé