NOM : .... Prénom : ....
NOM : .... Prénom : ....

UNIVERSITE DE RENNES I
U.F.R. de Mathématiques

Licence pluridisciplinaire
U.E. AMNU

Contrôle de travaux pratiques

jeudi 3 mai 2001

Durée : 2 heures

Créer le répertoire `TP-exam` *dans votre dossier AMNU et s'y positionner pour regrouper tous les fichiers utiles. Y lancer MATLAB .*
Le sujet comporte quatre pages.

A la fin de la séance, quitter MATLAB . Avant de quitter la salle, rendre cet énoncé-questionnaire. Aucune impression n'est nécessaire.

PARTIE I

Résolution d'équations non linéaires

On se donne une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ et on s'intéresse au problème de l'approximation numérique des solutions de l'équation $f(x) = 0$ au moyen de suites récurrentes (x_n).

On donne la procédure MATLAB suivante :

```
function [X,iter]=Fauspos(f,x0,x1,epsilon,itermax)
err=10 ;iter=0 ;
while (err>epsilon & iter<itermax)
iter=iter+1 ;y=x1 ;
x1=x1-(feval(f,x1)*(x1-x0)/(feval(f,x1)-feval(f,x0))) ;
x0=y ;
err=abs(x0-x1) ;
end
X=x1 ;
```

1. Ecrire, sous forme d'une suite récurrente, l'algorithme mathématique réalisé par cette fonction :

2. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x \ln x$.
Lancer l'algorithme précédent avec $x0 = 2$, $x1 = 1.1$, epsilon $= 10^{-5}$.

$$X = \boxed{} \qquad \text{iter} = \boxed{}$$

3. On obtient une approximation de l'ordre de convergence en calculant

$$t_n = \frac{\ln |x_{n+1} - x_n|}{\ln |x_n - x_{n-1}|}$$

où $n + 1$ est le nombre d'itérations trouvé.
Modifier la fonction `Fauspos` pour faire ce calcul :

Effectuer ce calcul : $t_n = \boxed{}$

PARTIE II

Intégration numérique

On travaillera avec le format `format long` pour obtenir des résultats avec huit décimales.

1. Présentation rapide des deux méthodes

a. La méthode des trapèzes

On considère une fonction numérique f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel non nul. On pose $x_i = a + (b - a)i/n$ pour $i = 0$ à n. On approche l'intégrale entre x_i et x_{i+1} de f par l'aire du trapèze de sommets $(x_i, 0), (x_{i+1}, 0), (x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. On appelle $T(f, a, b, n)$ la somme de ces aires et on obtient :

$$T(f, a, b, n) = \frac{b-a}{2n}\big[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + (b-a)\frac{i}{n})\big].$$

On a alors l'estimation d'erreur suivante :

$$|\int_a^b f(x)\,dx - T(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

b. La méthode de Simpson

On considère une fonction numérique f de classe $\mathscr{C}^4$ sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel non nul. On pose $x_i = a + (b - a)i/n$ pour $i = 0$ à n. On approche l'intégrale entre x_i et x_{i+1} de f par l'intégrale du polynôme du second degré P qui vérifie $P(x_i) = f(x_i), P(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ et $P(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2})$. On appelle $S(f, a, b, n)$ la somme de ces aires et on obtient :

$$S(f, a, b, n) = \frac{b-a}{6n}\big[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + (b-a)\frac{i}{n}) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(a + (b-a)\frac{2i+1}{2n})\big].$$

On a alors l'estimation d'erreur suivante :

$$|\int_a^b f(x)\,dx - S(f,a,b,n)| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

2. Ecriture des fonctions

On donne la fonction permettant le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ par la méthode des trapèzes.

```
function y = Trapez(f,a,b,n)
x=linspace(a,b,n+1) ;
y=(b-a)/(2*n)*(sum(feval(f,[a b]))+2*sum(feval(f,x(2:n)))) ;
```

Les variables d'entrée de la fonction `Trapez` sont `(F,a,b,n)` où a et b sont les bornes de l'intervalle, `F.m` le fichier dans lequel est programmé la fonction f et n le nombre d'intervalles. On appellera donc cette fonction par `Trapez('F',a,b,n)`. (*Remarquer les apostrophes encadrant* `F`, *il s'agit d'un argument chaîne de caractères)*
Les variables d'entrée de la fonction `Simpson` sont de même `(F,a,b,n/2)` où $n/2$ est le nombre d'intervalles. Ecrire de même une fonction `Simpson.m` permettant le calcul numérique de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode de Simpson avec $n+1$ points équidistants, c'est-à-dire le calcul de $S(f,a,b,n)$.

3. Jeux de données

On s'intéresse à la précision des méthodes des trapèzes et de Simpson, avec points équidistants, pour le calcul de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \exp(-x^2)\,dx = 0.74682413281242702\ldots$$

Créer une fonction `Fctexp.m` permettant le calcul de la fonction que l'on va intégrer. La tracer sur l'intervalle d'intégration.
Fonction MATLAB permettant le calcul de $g(x) = \exp(-x^2)$ appelée `Fctexp` :

Script pour obtenir son graphique :

Graphique obtenu :

4. Comparaison des deux méthodes

On complètera le tableau suivant, dans lequel le taux sera calculé selon la formule $\log(e_{n/2}/e_n)/log(2)$ où e_n est l'erreur relative obtenue dans le calcul avec n intervalles pour `Trapez`, $n/2$ intervalles pour `Simpson`.

$\int_0^1 \exp(-x^2)dx$	**Méthode des trapèzes**		**Méthode de Simpson**	
Intervalles	erreur relative	taux	erreur relative	taux
2		*non défini*		*non défini*
4				
8				
16				
32				
64				

Donner un script permettant le calcul d'une de ces lignes (au moins) :

Expliquer la signification théorique de ce taux :

Fin de l'énoncé