Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie. (Leçon 108)

Exercice n°1

Montrer que dans un espace vectoriel E de dimension finie

1) toute famille génératrice de E admet une sous-famille génératrice finie,

2) toute famille libre est finie et de cardinal inférieur à celui d'une famille génératrice quelconque de E.

Corrigé n°1

1) Soit $\{e_i\}_{i\in J}$ une famille génératrice de E. Comme E est de dimension finie, il admet une famille génératrice finie $\{f_1, \ldots, f_n\}$.
Chacun des f_j est combinaison linéaire finie des e_i et on peut donc trouver une partie finie K de J telle la famille $\{e_i\}_{i\in K}$ soit génératrice de E.

2) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille génératrice finie de E et $\{l_i\}_{i\in L}$ une famille libre de E. Si le cardinal de L est strictement supérieur à n, alors on peut en prendre une sous-famille $\{l_1, \ldots, l_{n+1}\}$ qui est encore libre.
$l_1 \neq 0$ puisque la famille est libre et on a $l_1 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Comme $l_1 \neq 0$, l'un des coefficients λ_i est non nul. Quitte à modifier l'ordre des e_i, on peut supposer que c'est λ_1. On en déduit que $e_1 \in \mathrm{Vect}\{l_1, e_2, \ldots, e_n\} = E_1$. Comme $e_1 \in E_1$, on a en fait $E_1 = E$.
En réitérant le procédé, à la $n$ème étape, on a une famille génératrice $\{l_1, \ldots, l_n\}$ de E. Or $l_{n+1} \in E$, donc $l_{n+1} = a_1 l_1 + \cdots + a_n l_n$ et on a trouvé une combinaison linéaire à coefficients non nuls (au moins celui de l_{n+1}) de $l_1, \ldots, l_{n+1}$. Ce qui est en contradiction avec le fait que cette famille soit libre.

Exercice n°2

Théorème de la base incomplète
On suppose que E est de dimension finie et on considère $\{e_i\}_{i\in J}$ une famille génératrice quelconque de E. On suppose également qu'il existe une partie I de J telle que la famille $\{e_i\}_{i\in I}$ soit libre.
Montrer qu'il existe un ensemble K tel que $I \subset K \subset J$ et tel que $\{e_i\}_{i\in K}$ soit une base de E.

Corrigé n°2

D'après l'exercice précédent, il existe une partie J_0 telle que $I \subset J_0 \subset J$ telle que $\{e_i\}_{i\in J_0}$ soit une famille génératrice finie de E.
Soit $B = \{K, I \subset K \subset J_0\,;\, \{e_i\}_{i\in K} \text{ famille libre}\}$.
B est un ensemble non vide car il contient I.
L'ensemble des cardinaux des éléments de B est donc majoré par $\mathrm{card}\, J_0$. Il admet donc un plus grand élément que l'on note p.
Soit $K_0 \in B$ tel que $\mathrm{card}\, B_0 = p$. Par définition de K_0, pour tout $K \subset J \setminus K_0$, la famille $\{e_i\}_{i\in K_0\cup K}$ est liée.
Supposons $\mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\in K_0}) \neq E$. Alors il existe $j \in J$ tel que $e_j \notin \mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\in K_0})$. Mais, d'après ce qui précéde, la famille $\{e_i\}_{i\in K_0\cup\{j\}}$ est liée. Absurde donc $\mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\in K_0}) = E$.
La famille $\{e_i\}_{i\in K_0}$ est donc génératrice de E ; or c'est une famille libre. C'est donc une base de E.

Exercice n°3

Montrer que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base finie.

Corrigé n°3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; il admet donc une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ génératrice finie. Si tous les e_i étaient nuls, E serait réduit au vecteur nul et il aurait une base finie.
Si ce n'est pas le cas, il existe $i_0 \in I$ tel que $e_{i_0} \neq 0$. La famille $\{e_{i_0}\}$ est donc libre. En utilisant le théorème de la base incomplète donné dans l'exercice précédent, on en déduit le résultat.

Exercice n°4

Soient $\{e_i\}_{i\in I}$ un système libre d'un espace vectoriel E de dimension finie et $\{f_j\}_{j\in J}$ un système générateur de E. Montrer que l'on peut compléter $\{e_i\}_{i\in I}$ en une base de E en utilisant exclusivement des éléments de $\{f_j\}_{j\in J}$.

Corrigé n°4

La famille $\big\{\{e_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}\big\}$ est génératrice de E et elle contient un système libre ; on peut donc appliquer le théorème de la base incomplète.