Interpolation polynomiale

1. Interpolation de Lagrange

1.1. Base de Lagrange

Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ réels donnés **distincts**. On définit $n+1$ polynômes l_i pour $i = 0$ à n par

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Le numérateur de chacun de ces polynômes est un produit de n termes $(x - x_k)$ et est donc un polynôme de degré n. Le dénominateur est une constante. On a donc

i) l_i est un polynôme de degré n
ii) $l_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ et $0 \leq k \leq n$
iii) $l_i(x_i) = 1$.

Réciproquement, pour i fixé, il existe un unique polynôme l_i vérifiant les trois propriétés précédentes. En effet, on en a déjà construit un qui convenait. Supposons qu'il y en ait deux l_i et p_i, alors $l_i - p_i$ est un polynôme de degré au plus n et ayant $n+1$ racines distinctes $x_0, \ldots, x_n$, c'est donc le polynôme nul.

Définition 1 – Les polynômes $l_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$.

Proposition 2 – Les polynômes $l_0(x)$, $l_1(x)\ldots, l_n(x)$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration : il suffit de montrer que ce système de polynômes est libre, puisqu'il est formé de $n+1$ éléments d'un espace de dimension $n+1$; supposons qu'il existe $n+1$ réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que, pour tout réel x

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i(x) = 0 \text{ alors, pour } x = x_k$$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i(x_k) = \alpha_k = 0.$$

On a prouvé le résultat. $\sqcup$

1.2. Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ réels donnés distincts.

Interpoler la fonction f par un polynôme de degré n aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ consiste à résoudre le problème suivant

Problème (1.3) $\quad \begin{cases} \text{Trouver un polynôme } p \text{ de degré } \leq n \text{ tel que} \\ p(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n. \end{cases}$

Si un tel polynôme existe, il s'écrit de manière unique

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i(x)$$

car les l_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En prenant $x = x_k$ pour $0 \leq k \leq n$ et en utilisant que $l_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $l_k(x_k) = 1$, on obtient

$$\alpha_k = p(x_k) = f(x_k).$$

Proposition 4 – L'unique solution du problème (3) est donc

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

Définition 5 – Ce polynôme s'appelle l'interpolant de la fonction f de degré n aux points $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$.

Remarque - Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ d'un polynôme de degré $\leq n$ est lui-même.

Si l'on prend pour f le polynôme constant égal à 1, d'après la remarque précédente, f est égale à son interpolant et on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

Le but de l'interpolation est de remplacer une fonction f plus ou moins compliquée par une fonction plus simple car polynômiale, mais pour justifier cet échange, il nous faut une estimation de l'erreur commise. On rappelle le théorème de Rolle :

Théorème 6 – Théorème de Rolle

Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.3. Estimation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange

Avant de donner une estimation de l'erreur, nous allons démontrer le lemme suivant

Lemme 7 – Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$ alors, si f possède au moins $n+2$ zéros distincts sur $[a,b]$, f' possède au moins $n+1$ zéros distincts sur $[a,b]$.

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de f $\sqcup$

Corollaire 8 – Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. Si f possède au moins $n+2$ zéros distincts sur $[a,b]$, alors $f^{(n+1)}$ a au moins un zéro sur $[a,b]$.

Démonstration : il suffit de faire une récurrence en appliquant le lemme précédent $\sqcup$

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,b]$ et soit $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$, $n+1$ points de $[a,b]$. On note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \ldots, x_n$.

Théorème 9 – On suppose $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, alors

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi \in [a,b],\ f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Démonstration : si $x = x_i$, alors la relation est vérifiée.
Soit $x \in [a, b]$ fixé, x différent de tous les x_i. Posons $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ et

$$W(t) = f(t) - P(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P(x)).$$

La fonction W est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ comme f et s'annule pour $t = x, x_0, x_1, \dots, x_n$; elle admet donc au moins $n + 2$ zéros. D'après le corollaire 8, il existe au moins un nombre $\xi \in [a, b]$ tel que $W^{(n+1)}(\xi) = 0$. On en déduit la relation. $\sqcup$

Le point ξ étant inconnu, on cherche une majoration et on a le corollaire immédiat :

Corollaire 10 – Si $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, b]$, alors

$$\forall x \in [a, b], \mid f(x) - P(x) \mid \leq \frac{\mid (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \mid}{(n + 1)!} \sup_{x \in [a,b]} \mid f^{(n+1)}(x) \mid .$$

2. Polynômes de Chebyshev

2.1. Choix des points d'interpolation

D'après le corollaire 10, pour obtenir la meilleure estimation possible pour une fonction f donnée, il faut choisir les $n + 1$ points d'interpolation $x_0, \dots, x_n$ de manière à minimiser le maximum sur $[a, b]$ de la fonction $|(x - x_0) \dots (x - x_n)|$. Si on appelle $E_{n+1}([a, b])$ l'ensemble des polynômes de degré $n + 1$ unitaires, le meilleur choix des x_i est donné par le polynôme $q \in E_{n+1}([a, b])$ tel que

$$\forall p \in E_{n+1}([a, b]), \quad \sup_{x \in [a,b]} |q(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |p(x)|.$$

Il faudra de plus s'assurer que le polynôme q trouvé admet bien $n + 1$ racines distinctes sur l'intervalle $[a, b]$. On va montrer l'existence de ce polynôme qu'on appellera polynôme de Chebyshev normalisé.

Remarque - En faisant le changement de variable

$$t = \frac{2}{b - a}x - \frac{b + a}{b - a} \Longleftrightarrow x = \frac{b - a}{2}t + \frac{b + a}{2}$$

on peut toujours se ramener à une étude sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Définition 11 – On appelle polynôme de Chebyshev de degré n le polynôme T_n défini sur $[-1, 1]$ par

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)).$$

La formule donnée dans le théorème ne fait pas apparaitre de manière évidente un polynôme. Cependant, on peut tout de suite noter que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) \in [-1, 1]$.
Considérons la formule de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. Pour $\theta \in [0, \pi]$, posons $x = \cos \theta$, alors $\sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$. On en déduit que

$$\cos n\theta = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} (-1)^i x^{n-2i} (1 - x^2)^i.$$

En particulier T_n est un polynôme de degré n.

Exemple -

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Les formules d'addition des fonctions trigonométriques donnent

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta.$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 12 – Les polynômes de Chebyshev vérifient la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Le coefficient du terme en x^n de T_n est 2^{n-1}.

Démonstration : le coefficient s'obtient par récurrence.

Théorème 13 – T_n a des zéros simples aux n points

$$x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

T_n atteint son extremum sur l'intervalle $[-1, 1]$ aux $n+1$ points

$$x'_k = \cos(\frac{k}{n}\pi), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

pour lesquels il prend alternativement les valeurs 1 et -1.

Démonstration : calculons $T_n(x_k)$.

$$T_n(x_k) = \cos\big(n \operatorname{Arccos}(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi)\big) = \cos(\frac{2k-1}{2}\pi) = 0 \text{ car } \frac{2k-1}{2n}\pi \in [0, \pi].$$

On a donc trouvé n racines distinctes, or T_n est un polynôme de degré n ; on les a donc toutes. On montre de même $T_n(x'_k) = (-1)^k$. $\sqcup$

Définition 14 – On appelle polynôme normalisé de Chebyshev le polynôme $\overline{T}_n$ défini par $\overline{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.

2.2. Estimation de l'erreur avec les polynômes de Chebyshev

On va montrer que ce polynôme $\overline{T}_n$ est le polynôme que l'on cherchait.

Théorème 15 – Pour tout polynôme p de $E_n([-1, 1])$, on a

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x\in[-1,1]} |\overline{T}_n(x)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |p(x)|.$$

Démonstration : supposons qu'il existe $p \in E_n$ tel que $\sup_{x\in[-1,1]} |p(x)| < 1/2^{n-1}$. Considérons le polynôme $\overline{T}_n - p$. C'est un polynôme de degré $\leq n-1$. De plus, $r(x'_k) = \overline{T}_n(x'_k) - p(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x'_k)$ pour $k = 0, \ldots, n$. Cette quantité prend alternativement le signe $+$ ou $-$. On en déduit que r a au moins n racines, or c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $r = 0$. On obtient $\overline{T}_n = p$. Contradiction. $\sqcup$

En utilisant le changement de variable définie plus haut, on a donc montré le théorème

Théorème 16 – Sur l'intervalle $[a, b]$, en choisissant les points d'interpolation

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \text{ pour } k = 0, \dots, n$$

on obtient la majoration suivante :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

C'est la meilleure majoration globale que l'on puisse obtenir.

Remarque - La formule de Taylor-Lagrange montre que, si l'on approche la fonction f par la fonction polynômiale

$$P_f : x \longrightarrow f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

on a alors

$$|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Cette estimation montre la supériorité de la méthode de Chebychev.

3. Introduction aux polynômes orthogonaux

3.1. Définition des polynômes orthogonaux

On se donne une fonction w définie sur $]a, b[$, intégrale sur $[a, b]$ et à valeurs positives ou nulles. Cette fonction est appelée **poids**.
On définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ par la relation

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,dt.$$

A ce produit scalaire, on associe la norme $\|f\|^2 = \displaystyle\int_a^b [f(t)]^2 w(t)\,dt.$

Définition 17 – On appelle **polynômes orthogonaux** relativement au poids w la suite des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ ayant les propriétés suivantes
1 – Pour tout n, P_n est de degré n et le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.
2 – $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
On admet la proposition suivante

Proposition 18 – Quelquesoit la fonction poids w, il existe une unique suite de polynômes orthogonaux.

3.2. Exemple : les polynômes de Chebyshev

On prend $a = 1$, $b = -1$ et $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. La fonction w est bien définie sur $]-1, 1[$ à valeurs positives et $\displaystyle\int_{-1}^1 w(x)\,dx = \Big[\text{Arcsin}(x)\Big]_{-1}^1 = \pi.$
On a vu que $\overline{T}_n$ est de degré n et que le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.
Il reste à montrer que $(\overline{T}_0, \dots, \overline{T}_n)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$
Le changement de variables $t = \cos\theta$ donne

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta.$$

On en déduit que, si $n \neq l$,

$$
\begin{aligned}
(T_n, T_l) &= \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(l\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos(n+l)\theta + \cos(n-l)\theta\big)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(n+l)\theta}{b+l} + \frac{\sin(n-l)\theta}{n-l}\Big]_0^\pi = 0.
\end{aligned}
$$

3.3. Approximation au sens des moindres carrés

Soit f une fonction définie sur l'intervalle réel $[a,b]$ et w une fonction poids. L'approximation au sens des moindres carrés consiste à trouver un polynôme P de degré n qui minimise la valeur de $\displaystyle\int_a^b \big|f(x) - P(x)\big|^2 w(x)\,dx = \|f - P\|^2$. Ce polynôme, s'il existe, est appelé approximation de f de degré au plus n au sens des moindres carrés.
On admettra qu'un tel polynôme existe et qu'il est unique.

C'est en fait la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ et il est donné par $P = \displaystyle\sum_{i=0}^n (f, P_i)\,P_i$ où $(P_0, \dots P_n)$ est la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ associée à w.
On est alors ramené à un calcul d'intégrales.

INTERPOLATION POLYNOMIALE