# Réduction d'endomorphismes

## 1. Qu'est-ce que réduire un endomorphisme ?

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Si on se place dans une base de $E$, on peut représenter $f$ par une matrice. Le but de ce chapitre est de trouver une base de $E$ telle que la matrice représentant $f$ dans cette base soit la plus "simple" possible (on prend la même base pour $E$ ensemble de départ que pour $E$ ensemble d'arrivée).

**Définition 1 –**

– on dit que $f$ est diagonalisable, s'il existe une base $\{e_i\}$ de $E$ telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– on dit que $f$ est triangularisable (ou trigonalisable), s'il existe une base $\{e_i\}$ de $E$ telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on suppose que $E$ est un espace vectoriel de dimension **finie** sur un corps $\mathbb{K}$.

## 2. Vecteurs propres - Valeurs propres

### 2.1. Vecteurs propres

**Définition 2 –** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un vecteur $u \in E$ est un vecteur propre de $f$ si

1) $u$ est non nul
2) il existe $\lambda \in \mathbb{K},\ f(u) = \lambda u$

Le scalaire $\lambda$ est appelé **valeur propre** associée à $u$.

**Remarque** - Si $u$ est vecteur propre de $f$, alors, par linéarité de $f$, $\alpha u$ est vecteur propre de $f$ pour tout $\alpha \neq 0$.

**Théorème 3 –** L'endomorphisme $f$ de $E$ est diagonalisable si et seulement il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.

*Démonstration : si $f$ est diagonalisable, alors il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que*

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*On en déduit que, pour tout vecteur $e_i$ de cette base $f(e_i) = a_{ii}e_i$ avec $e_i \neq 0$ donc cette base est formée de vecteurs propres. Réciproquement, si $E$ admet une base de vecteurs propres de $f$, il est clair que la matrice de $f$ dans cette base sera diagonale.* $\sqcup$

**Remarque** - Si $f$ est diagonalisable, les termes qui apparaissent sur la diagonale de la matrice représentant $f$ dans une base de vecteurs propres sont les valeurs propres associées.

### 2.2. Polynôme caractéristique

Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$. L'endomorphisme $f - \lambda Id$ n'est alors pas injectif puisqu'il existe $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda\, u$. Comme on est en dimension finie, c'est équivalent à sa non-bijectivité, donc à ce que le déterminant de $f - \lambda Id$ soit nul.

**Proposition 4 –** Les valeurs propres de $f$ sont les racines du polynôme $P_f(\lambda) = \text{Dét}(f - \lambda Id)$. $P_f(\lambda)$ est un polynôme de degré $n$, appelé **polynôme caractéristique** de $f$.

**Remarque** - Si $A$ et $B$ sont deux matrices représentant un même endomorphisme $f$ dans deux bases distinctes, alors elles sont semblables donc $\text{Dét}(A - \lambda I) = \text{Dét}(B - \lambda I)$. On appelle également polynôme caractéristique de la matrice $A$ le polynôme $\text{Dét}(A - \lambda I_n)$.

**Définition 5 –** On dit qu'une valeur propre de $f$ est de multiplicité $\alpha$ si elle est racine d'ordre $\alpha$ du polynôme caractéristique de $f$.

Une fois déterminées les valeurs propres, on détermine l'espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs en résolvant le système linéaire $(A - \lambda Id)(u) = 0$ où $A$ est la matrice de $f$ dans une certaine base.

**Définition 6 –** L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme $f$ est appelé le spectre de $f$.

**Proposition 7 –** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de $A$ est de degré $n$ et, plus précisément, on a :

$$\text{Dét}(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \lambda^i \text{ avec } a_0 = \text{Dét}\, A,\ a_{n-1} = (-1)^{n-1}\text{tr}A$$

## 3. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

**Proposition 8 –** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id) = \{x \in E\,;\ f(x) = \lambda\, x\}$.
$E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé **espace propre** associé à $\lambda$.
L'espace $E_\lambda$ est stable par $f$.

*Démonstration : $E_\lambda$ est le noyau d'un endomorphisme donc c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ de cet endomorphisme.*
*Montrons qu'il est stable par $f$. Soit $x \in E_\lambda$, alors $f(x) = \lambda x$. Donc $f\big(f(x)\big) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$. On a montré que $f(x) \in E_\lambda$, ce qui prouve que $E_\lambda$ est stable par $f$.* $\sqcup$

**Remarque** -

– si $\lambda$ n'est pas valeur propre, $E_\lambda = \{0\}$.
– si $\lambda$ est valeur propre, $\dim E_\lambda \geq 1$.

**Proposition 9 –** Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires distincts deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

*Démonstration : on prouve le résultat par récurrence sur $p$. Si $p = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons que les espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ soient en somme directe et montrons que les espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}, E_{\lambda_{p+1}}$ sont aussi en somme directe.*
*Pour cela, il suffit de montrer que $(E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}} = \{0\}$.*
*Soit $x \in (E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}}$. On a $f(x) = \lambda_{p+1}x$ car $x \in E_{\lambda_{p+1}}$.*
*Comme $x \in E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$, il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, x_p \in E_{\lambda_p}$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.*
*On a donc également $f(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$. On déduit de ces deux calculs que*

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p.$$

*Les espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe donc*

$$\text{pour } k \in \{1, \ldots, p\}, \quad (\lambda_k - \lambda_{p+1})x_k = 0.$$

*Comme les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts, on en déduit que $x = 0$.* ⊔

**Corollaire 10 –** L'endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement si $E$ est somme directe de ses sous-espaces propres.

Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$, on a

**Corollaire 11 –** L'endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement si
$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p}$.

**Proposition 12 –** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda$ une valeur propre de multiplicité $\alpha$. Alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

*Démonstration : supposons $\dim E_\lambda \geq \alpha + 1$. Soient $u_1, \ldots, u_{\alpha+1}$ des vecteurs propres linéairement indépendants de $E_\lambda$. Complétons cette famille en une base $\mathscr{B}$ de $E$. On a*

$$M(f)_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right)$$

*d'où $P_f(X) = \text{Dét}\big[(\lambda - X)I_{\alpha+1}\big]\, \text{Dét}(B - X\, I_{n-\alpha-1}) = (\lambda - X)^{\alpha+1}\, \text{Dét}(B - X\, I_{n-\alpha-1})$.*
*$\lambda$ serait donc valeur propre de multiplicité strictement supérieure à $\alpha$. Absurde* ⊔

Des propositions précédentes, on déduit le

**Théorème 13 –** Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie. L'endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

1) $P_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, ce qui veut dire que

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ scalaires et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$.

2) Pour chaque valeur propre $\lambda$ de multiplicité $\alpha$, on a $\dim E_\lambda = \alpha$.

**Corollaire 14** – Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$. Si $f$ admet $n$ valeurs propres distinctes deux à deux, alors $f$ est diagonalisable.

## 4. Applications de la diagonalisation

### 4.1. Calcul de la puissance d'une matrice

Si $A$ est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale. Alors $A = PDP^{-1}$ et

$$A^k = PD^kP^{-1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

La matrice $A$ est alors inversible si, et seulement si, $D$ est inversible et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. La formule précédente se généralise alors à $k \in \mathbb{Z}$.

**Remarque** - Si $A$ est la matrice d'un endomorphisme $f$ dans la base $\mathcal{B}_0$, alors $P$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de $A$. La matrice $P$ est obtenue en mettant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$ des vecteurs propres de $A$ en colonnes. (De l'ordre des vecteurs propres dans la base $\mathcal{B}$ dépend l'ordre des valeurs de la diagonale de $D$, et réciproquement.)

### 4.2. Suites récurrentes linéaires

Soient $a$ et $b$ deux réels donnés non simultanément nuls. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifie la relation

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad u_0 \text{ et } u_1 \text{ donnés.}$$

Matriciellement, ceci peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené à un calcul de puissance de matrice.

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ $k$ réels donnés non tous nuls. Une suite récurrente linéaire d'ordre $k$ vérifie la relation

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i}, \quad \{u_0, \dots, u_{k-1}\} \text{ donnés.}$$

On écrit cette égalité sous forme matricielle et on est encore ramené à un calcul de puissance de matrice d'ordre $k$.

### 4.3. Systèmes de suites récurrentes

Illustrons cela par un exemple :

déterminer les trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n + 5w_n \end{cases}$$

Posons $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n)$, alors $X_0 = {}^t(1, 0, 0)$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$, d'où, par récurrence, $X_n = A^n X_0$. On est ainsi ramené au calcul de $A^n$.

### 4.4. Systèmes différentiels à coefficients constants

On veut résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, alors le système s'écrit sous forme matricielle

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Supposons $A$ diagonalisable. Il existe alors une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Si on pose $X' = P^{-1}X$, le système devient $\dfrac{dX'}{dt} = DX$, système qui s'intégre facilement car $D$ est diagonale.

## 5. Trigonalisation

**Définition 15** – Une matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

**Remarque** - Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure. En effet, soit $A$ une matrice triangulaire supérieure et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par $A$ dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. $f$ est représenté par une matrice triangulaire inférieure dans la base $(e_n, \ldots, e_1)$.

**Théorème 16** – Un endomorphisme est triangularisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

*Démonstration : si l'endomorphisme $f$ est triangularisable, alors il existe une base telle que la matrice de $f$ dans cette base soit triangulaire supérieure. On a alors*

$$P_f(\lambda) = \text{Dét} \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & & a_{1n} \\ 0 & \ddots & a_{2n} \\ \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$$

*donc $P_f(X)$ est scindé. De plus, les éléments diagonaux de la matrice triangulaire sont les valeurs propres de $f$.*

*Réciproquement, supposons que le polynôme caractéristique de $f$ soit scindé et montrons par récurrence que $f$ est triangularisable. Pour $n=1$, il n'y a rien à montrer. Supposons le résultat vrai à l'ordre $n-1$. Puisque $P_f(\lambda)$ est scindé, il admet au moins une racine $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $u_1$ un vecteur propre associé. On complète $\{u_1\}$ en une base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $E$. On a alors*

$$M(f)_{u_i} = \left(\begin{array}{c|ccc} a & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

*On a $P_f(\lambda) = (a-\lambda)\,\text{Dét}(B - \lambda I_{n-1}) = (a-\lambda)P_g(\lambda)$ où $g$ est l'endomorphisme représenté par la matrice $B$ dans la base $(u_2 \ldots, u_n)$. Comme $P_f(\lambda)$ est scindé, $P_g(\lambda)$ l'est aussi et, d'après l'hypothèse de récurrence, la matrice $B$ est triangularisable. Il existe donc une base $(v_2, \ldots, v_n)$ de $\text{Vect}\{u_2, \ldots, u_n\}$ telle que la matrice de $g$ dans cette base soit triangulaire supérieure.*
*Ainsi, dans la base $\{u_1, v_2, \ldots, v_n\}$, la matrice de $f$ est triangulaire supérieure.* $\sqcup$

**Corollaire 17 –** Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

*Démonstration : un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.* $\sqcup$

**Remarque** - Si la matrice $A$ est triangularisable, les éléments diagonaux de la matrice triangulaire semblable à $A$ sont les valeurs propres de $A$.

## 6. Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ :

$$P(X) = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$P(f) = a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 Id$$

où $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

**Définition 18 –** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P(x)$ de $\mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de $f$ si $P(f) = 0$.

**Proposition 19 –** Soit $P(X)$ un polynôme annulateur de $f$. Alors les valeurs propres de $f$ sont des racines de $P$.

*Démonstration : si $\lambda$ est valeur propre de $f$, il existe un vecteur $u$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$. On a alors $f^k(u) = \lambda^k u$ pour tout entier $k$. On en déduit que $\big[P(f)\big]u = 0 = P(\lambda)\,u$ donc $P(\lambda) = 0$ car $u \neq 0$.* $\sqcup$

**Remarque** - Un endomorphisme qui vérifie $P(f) = 0$ ne peut avoir pour valeur propre que des racines de $P$ ; par contre, toutes les racines de $P$ ne sont pas forcément des valeurs propres de $f$.

**Théorème 20 – Théorème de Cayley-Hamilton**
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P_f(X)$ son polynôme caractéristique. On a

$$\boxed{P_f(f) = 0}$$

*Démonstration : on se place dans la clôture algébrique de $\mathbb{K}$ (ici, il s'agit de $\mathbb{C}$ car $\mathbb{K}$ est supposé être un sous-corps de $\mathbb{C}$). Dans ce cas, l'endomorphisme $f$ est triangularisable donc son polynôme caractéristique est scindé :*
$P_f(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\dots(\lambda_n - X)$.
*Si on note $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base de $E$ dans laquelle la matrice représentant $f$ est triangulaire, on a $(\lambda_1 Id - f)(e_1) = 0$. On montre alors par récurrence que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$, $(\lambda_1 Id - f)\circ\cdots\circ(\lambda_i Id - f)(e_j) = 0$ car les $(\lambda_k Id - f)$ commutent entre eux. On en déduit que $P_f(f) = 0$.* $\sqcup$

## 7. Théorème de décomposition des noyaux

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f$ un endomorphisme de $E$.

**Théorème 21 –** Soient $P_1, \dots, P_q$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. On pose $P = P_1 \times \dots \times P_q$. Alors on a

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, P(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_q(f)}$$

*Démonstration : par récurrence sur $q$.*
*Si $q = 2$ : $P_1$ et $P_2$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $U$ et $V$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP_1 + VP_2 = 1$, d'où $UP_1(f) + VP_2(f) = Id$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$, on a $x = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x)$. Posons $y = UP_1(f)(x)$ et $z = VP_2(x)$. On a $P_2(f)y = P_2UP_1(f)(x) = UP_1P_2(f)(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}\, P$ et les endomorphismes $P_1(f)$ et $U(f)$ commutent. On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}\, P_1$. On montre de même que $z \in \mathrm{Ker}\, P_2$, d'où $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Ker}\, P_1 + \mathrm{Ker}\, P_2$.*
*Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}\, P_1 \cap \mathrm{Ker}\, P_2$. Comme $x = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x)$, on a trivialement $x = 0$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Ker}\, P_1 \oplus \mathrm{Ker}\, P_2$.*
*Supposons le résultat vrai à l'ordre $q-1$ et soient $P_1, \dots, P_q$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. Le polynôme $P_1$ est alors premier avec le produit $P_2 \times \dots \times P_q$ donc, d'après ce qui précéde, $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Ker}\, P_1 \oplus \mathrm{Ker}(P_2 \times \dots \times P_q)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $P_2 \times \dots \times P_q$, ce qui prouve le résultat.* $\sqcup$

**Remarque** - Si $P(f) = 0$ et si $P = P_1 \times \dots \times P_q$ où les polynômes $P_1, \dots, P_q$ sont premiers entre eux deux à deux, alors $E = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_q(f)$.

**Théorème 22 –** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Un endomorphisme $f$ de $E$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, n'ayant que des racines simples et annulant $f$.

*Démonstration : la condition est suffisante d'après le théorème précédent.*
*Supposons $f$ diagonalisable, alors il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ de vecteurs propres de $f$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes, il est clair que le polynôme $P(X) = (X - \lambda_1) \times \cdots \times (X - \lambda_p)$ vérifie $P(f)(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Comme les $e_i$ forment une base de $E$, on en déduit que $P(f) = 0$.* $\sqcup$

## 8. Polynôme minimal

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. L'ensemble $I_f$ des polynômes $P$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. $\mathbb{K}[X]$ étant un anneau principal, il existe un polynôme $\mu$ engendrant $I_f$. De plus, ce polynôme est unique si on le suppose unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1).

**Définition 23 –** On appelle polynôme minimal de $f$ l'unique polynôme $\mu$ unitaire qui engendre $I_f$.

**Remarque** - Comme $\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie, la famille $(Id, f, \dots, f^{n^2})$ où $\dim E = n$ est liée . Il existe donc une combinaison linéaire non triviale de ses éléments qui est nulle. On en déduit que $I_f \neq \{0\}$ et donc $1 \leq \deg \mu$.

**Corollaire 24 –** Le polynôme minimal de $f$ est un diviseur du polynôme caractéristique de $f$.

**Proposition 25 –** Les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f$ sont exactement les racines de son polynôme minimal.

*Démonstration : il est clair que les racines du polynôme minimal sont racines du polynôme caractéristique. Réciproquement, soit $\lambda$ une racine de $P_f$. Il existe alors $v \neq 0$ tel que $(f - \lambda Id)(v) = 0$.*
*Posons $\mu_f(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Puisque $\mu_f(f) = 0$, on a $f^p(v) + a_{p-1}f^{p-1}(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0 v = 0$. En utilisant que $f^r(v) = \lambda^r v$, on obtient que $\mu_f(\lambda) = 0$ car $v \neq 0$.* $\sqcup$

**Théorème 26 –** Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et a toutes ses racines simples.

*Démonstration : la condition est suffisante car $\mu_f(f) = 0$. Réciproquement, supposons que $f$ soit diagonalisable et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Supposons, au besoin en changeant la numérotation, que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ soient distinctes deux à deux et représentent toutes les valeurs propres de $f$. Si $v \in \mathscr{B}$, alors*

$$(f - \lambda_1 Id) \circ \cdots \circ (v - \lambda_p Id)v = 0$$

*donc le polynôme $P(X) = (X - \lambda_1) \times \ldots \times (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de $f$. Comme $\mu_f(X)$ divise $P(X)$ et que $P(X)$ n'a que des racines simples, on en déduit que $\mu_f$ n'a que des racines simples.* $\sqcup$

## 9. Sous-espaces caractéristiques

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. On note $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de $f$.
On suppose que $P_f(X)$ est scindé et s'écrit

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

où les $\lambda_i$ sont distincts deux à deux.

**Définition 27 –** On appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre $\lambda_i$ le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}.$$

**Proposition 28 –** $N_{\lambda_i}$ est stable par $f$.

*Démonstration : soit $x \in N_{\lambda_i}$. Montrons que $f(x) \in N_{\lambda_i}$. On a $(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0$. Les endomorphismes $f$ et $(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ commutent donc $(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(f(x)) = f \circ (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0$ et on a prouvé que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$* $\sqcup$

**Remarque** - On a toujours $E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}$ que $f$ soit diagonalisable ou pas.

**Théorème 29 –** Réduction selon les sous-espaces caractéristiques

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe une base $\mathscr{B} = \{\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p\}$ où $\mathscr{B}_i$ est une base de $N_{\lambda_i}$ telle que

$$M(f)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est la matrice (triangulaire supérieure) de la restriction de $f$ à $N_{\lambda_i}$ dans la base $\mathscr{B}_i$. C'est une matrice de $\mathscr{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$.

*Démonstration : elle se fait en plusieurs étapes. Remarquons d'abord que les espaces $N_{\lambda_i}$ sont stables par $f$ donc il existe une base $\mathscr{B}' = \{\mathscr{B}'_1, \ldots, \mathscr{B}'_p\}$ de $E$ où $\mathscr{B}'_i$ est une base de $N_{\lambda_i}$ telle que la matrice de $f$ soit diagonale par blocs, chaque bloc représentant la restriction $f_i$ de $f$ à $N_{\lambda_i}$. Notons $M_{\lambda_i}$ un de ces blocs non nuls. Il reste à montrer que $M_{\lambda_i}$ est triangularisable et que la diagonale de la matrice triangulaire obtenue ne contient que des $\lambda_i$.*
*Comme $N_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$, le polynôme $Q(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de $f_i$. Par conséquent le polynôme minimal de $f_i$ est du type*

$$\mu_{f_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i} \text{ avec } 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i.$$

*Comme les racines de $P_{f_i}$ sont exactement les racines de $\mu_{f_i}$, on en déduit que le polynôme caractéristique de $f_i$ est scindé, que $M_{\lambda_i}$ est triangularisable et que sa diagonale est formée de termes tous égaux à $\lambda_i$* ⊔

## 10. Diagonalisation simultanée

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur un corps $\mathbb{K}$.
On considère deux endomorphismes $f$ et $g$ de $E$ tels que

1) $f$ et $g$ soient diagonalisables
2) $f \circ g = g \circ f$

**Proposition 30 –** Il existe une base de $E$ telle que les matrices représentatives dans cette base de $f$ et $g$ respectivement soient diagonales. On dit que $f$ et $g$ sont simultanément diagonalisables.

*Démonstration : raisonnons par récurrence sur $n$.*
*Si $n = 1$, le résultat est trivialement vrai.*
*Supposons qu'il soit vrai sur tout espace de dimension inférieure ou égale à $n-1$. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f$ distinctes deux à deux. Si $f$ est une homothétie, le résultat est vrai car toute base qui diagonalise $g$ diagonalise $f$. Si $f$ n'est pas une homothétie, $E$ est somme directe de ses sous-espaces propres qui sont tous de dimensions strictement inférieures à $n$ (car $f$ n'est pas une homothétie). Soit $E_\lambda$ un sous-espace propre de $f$. Montrons qu'il est stable par $g$. Soit $x \in E_\lambda$. On a $(f - \lambda Id) \circ g(x) = g \circ (f - \lambda Id)(x)$ car $f$ et $g$ commutent. Donc $(f - \lambda Id) \circ g(x) = 0$*

*car $(f-\lambda Id)(x)=0$. D'où $g(x)\in E_\lambda$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à chacun des sous-espaces propres de $f$ pour obtenir le résultat.* $\sqcup$

# 11. Décomposition de Dunford

## 11.1. Endomorphismes nilpotents

**Définition 31 –** Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit nilpotent s'il existe un entier $p$ non nul tel que $f^p=0$. On pose alors $n_0=\min\{p\in\mathbb{N}^*\,;\,f^p=0\}$. L'entier naturel $n_0$ est appelé indice de $u$.

**Proposition 32 –** Soient deux endomorphismes nilpotents qui commutent alors leur somme est nilpotente.

*Démonstration : soient $f$ et $g$ deux endomorphismes nilpotents d'indices respectifs $p$ et $q$. Comme $f$ et $g$ commutent, on peut utiliser la formule de Newton :*

$$(f+g)^{p+q}=\sum_{i=0}^{p+q}C_{p+q}^i\,f^i\,g^{p+q-i}.$$

*Dans chaque terme de la somme, on a soit $i\geq p$, soit $n+p-i\geq q$ donc soit $f^i=0$, soit $g^{p+q-i}=0$. On en déduit que $f+g$ est nilpotent.* $\sqcup$

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur un corps $\mathbb{K}$.

## 11.2. Décomposition de Dunford

**Théorème 33 –** Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. On suppose que son polynôme caractéristique $P_f(X)$ est scindé.
Alors $f$ s'écrit de manière unique $f=d+n$ où $d$ est un endomorphisme diagonalisable de $E$ et $n$ un endomorphisme nilpotent de $E$ tels que $d\circ n=n\circ d$. De plus $d$ et $n$ sont des polynômes en $u$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

*Démonstration : notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les racines de $P_f(X)$ distinctes deux à deux et $\alpha_k$ leurs multiplicités respectives. Soit $N_k=\mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)^{\alpha_k}$ et $f_k$ la restriction de $f$ à $N_k$. $F_k$ est bien définie car $N_k$ est stable par $f$. On note également $g_k$ la restriction de $f-\lambda_k$ à $N_k$. On a $f_k=\lambda_k Id+g_k$ ; or $\lambda_k Id$ est diagonalisable et $g_k$ est nilpotente et ces deux endomorphismes commutent entre eux. On a donc montré l'existence de la décomposition.*

*Montrons maintenant que les endomorphismes $d$ et $n$ sont des polynômes en $u$.*
*On pose $P_i(X)=\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{\alpha_j}$ pour $1\leq i\leq p$. Les polynômes $P_i(X)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après le théorème de Bezout, il existe des polynômes $Q_i(X)$ tels que $P_1Q_1+\cdots+P_pQ_p=1$. On a donc*

$$P_1(f)Q_1(f)+\cdots+P_p(f)Q_p(f)=Id_E.$$

*Posons $R_k(f)=P_k(f)Q_k(f)$. Pour tout $x\in E$, on a $x=R_1(f)(x)+\cdots+R_p(f)(x)$. Comme $R_k(f)(x)\in M_k$, cette somme est en fait la décomposition de $x$ dans la somme directe $E=N_1\oplus+\cdots\oplus N_p$. L'application $R_k(f)$ est donc la projection sur $N_k$ parallèlement à la somme directe des autres espaces. On pose alors $d=\sum_{i=1}^{p}\lambda_k R_k(f)$ et $n=u-d$. Ce sont bien des polynômes en $u$. L'endomorphisme $d$ est bien diagonalisable car les $R_k(f)$ commutent entre eux deux à deux et sont diagonalisables. L'endomorphisme $n$ est nilpotent car le polynôme caractéristique de $f$ est scindé donc il existe une base de $E$ dans laquelle* *la matrice représentative de* $f$ *est triangulaire supérieure ; or, dans cette base, la matrice de* $n$ *est triangulaire supérieure avec une diagonale nulle.*

*Montrons enfin l'unicité de cette décomposition. Supposons qu'il existe* $D$ *et* $N$ *tels que* $f = D+N$, $D$ *et* $N$ *vérifiant les mêmes hypothèses que* $d$ *et* $n$. *Comme* $D$ *et* $N$ *commutent, ils commutent avec* $f$, *donc ils commutent avec* $d$ *et* $n$ *car ce sont des polynômes en* $f$. *Posons* $h = D - d = n - N$. $n - N$ *est nilpotent car* $n$ *et* $N$ *le sont. De plus* $D$ *et* $d$ *commutent et sont diagonalisables donc ils sont simultanément diagonalisables et* $D - d$ *est diagonalisable. L'endomorphisme* $h$ *est donc nilpotent et diagonalisable ; on en déduit qu'il est nul.* $\sqcup$

# RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES