Matrices

On note $\mathbb{K}$ un corps commutatif. n et p représentent deux entiers naturels non nuls.

1. Notion de matrice

1.1. Définitions

Définition 1 – On appelle matrice d'ordre (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$.

Soit M une matrice d'ordre (n,p) à éléments dans $\mathbb{K}$. On note m_{ij} l'élément de $\mathbb{K}$ indexé par (i,j). La matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ est représentée par un tableau rectangulaire :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{np} \end{pmatrix}$$

avec la convention que l'élément m_{ij} est situé sur la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

L'ensemble des matrices d'ordre (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 2 –

1 – On appelle matrice-colonne une matrice d'ordre $(n,1)$.
2 – On appelle matrice-ligne une matrice d'ordre $(1,p)$.
3 – On appelle matrice carrée d'odre n une matrice d'ordre (n,n).
4 – On appelle sous-matrice (ou matrice extraite) de M toute matrice obtenue en supprimant dans M un certain nombre de lignes ou de colonnes.
5 – On appelle matrice triangulaire supérieure toute matrice carrée d'ordre n telle que, si $j < i$, alors $m_{ij} = 0$.
6 – On appelle matrice triangulaire inférieure toute matrice carrée d'ordre n telle que, si $j > i$, alors $m_{ij} = 0$.
7 – On appelle matrice diagonale une matrice à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.

1.2. Addition et multiplication par un scalaire

Soient A et B deux matrices d'ordre (n,p) et λ un scalaire (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$). On définit une loi de composition interne sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée addition des matrices, par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$$

et une loi de composition externe, appelée multiplication par un scalaire, par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$$

Muni de ces deux lois, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Important - Ces deux lois sont en fait définies

– pour que la matrice représentant l'addition de deux applications linéaires de E (avec $\dim E = p$) dans F (avec $\dim F = n$) soit la somme des deux matrices représentant ces applications, les bases respectives de E et F étant fixées
– et que la matrice représentant la multiplication par un scalaire d'une application linéaire de E dans F soit le produit de ce scalaire par la matrice représentant l'application linéaire. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est alors un espace vectoriel isomorphe à $\mathscr{L}(E, F)$ et donc de dimension np.

1.3. Produit de matrices

Définition 3 – Soient $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle produit de A par B la matrice $C = AB$ de $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq p.$$

Remarque - Le produit de matrices n'est pas commutatif.

Important - E est un espace vectoriel de dimension p, F un espace vectoriel de dimension n et G un espace vectoriel de dimension m. On note (e) une base de E, (f) une base de F et (g) une base de G. Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. La définition précédente permet d'écrire :

$$\mathrm{Mat}(v \circ u; (e), (g)) = \mathrm{Mat}(v; (f), (g))\mathrm{Mat}(u; (e), (f)).$$

On retrouve donc, pour le produit de matrices, les propriétés de la composition des applications linéaires : associativité, distributivité ...

2. Algèbre des matrices carrées

Le produit de matrices est parfaitement défini sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Cette loi de composition interne est associative et distributive par rapport à l'addition et on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \ \lambda(BC) = (\lambda B)C = B(\lambda C).$$

L'élément neutre pour le produit est la matrice, appelée identité et notée I_n, dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments diagonaux qui valent 1.

Proposition 4 – $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

On pourra également vérifier que l'ensemble des matrices diagonales et l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) sont des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (Il suffit en fait de vérifier que le produit de deux matrices diagonales ou triangulaires supérieures est respectivement diagonal ou triangulaire supérieur).

Définition 5 – On appelle groupe linéaire d'ordre n sur le corps $\mathbb{K}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On le note $GL_{\mathbb{K}}(n)$.

3. Transposition et matrices

3.1. Définition

Définition 6 – Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de M et on note ${}^tM$ la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$({}^tM)_{ij} = (M)_{ji}.$$

Proposition 7 –

1) Si le produit BA est défini, alors le produit ${}^tA{}^tB$ aussi et ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.
2) Si A est une matrice carrée inversible, alors la matrice ${}^tA$ est inversible et son inverse est $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3.2. Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 8 –
1 – Dire que la matrice M est symétrique signifie que ${}^tM = M$.
2 – Dire que la matrice M est antisymétrique signifie que ${}^tM = -M$.

Proposition 9 – Les sous-ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si le corps $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, ils sont supplémentaires de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont respectivement les noyaux des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définis par $M \mapsto M - {}^tM$ et $M \mapsto M + {}^tM$. Ce sont donc des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Leur intersection est réduite à la matrice nulle (car le corps n'est pas de caractéristique 2) et toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique : $M = (M - {}^tM)/2 + (M + {}^tM)/2$. $\sqcup$

4. Rang d'une matrice

Définition 10 – On appelle rang d'une matrice M le rang du système de ses vecteurs-colonnes.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On note (e) une base de E et (f) une base de F.
Si M est la matrice de u par rapport aux bases (e) et (f), alors les vecteurs-colonnes de M sont les homologues des images par u des vecteurs de la base (e) écrits dans la base (f). On a donc rang(u)=rang(M).

Théorème 11 – Soit M une matrice carrée d'ordre n. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) M est inversible ;
ii) M est de rang n ;
iii) M est inversible à droite ;
iv) M est inversible à gauche.

Ce théorème correspond au théorème sur les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n : u est bijectif si et seulement si il est de rang n et il est bijectif si et seulement si il est injectif (respectivement surjectif).

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p et $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{f_1, \ldots, f_p\}$ une base de F. On note $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ et $\{f_1^*, \ldots, f_p^*\}$ les bases duales correspondantes. On a $\boxed{M(\varphi, (e_i), (f_j)) = {}^tM({}^t\varphi, (f_j^*), (e_i^*)).}$

Or rang(φ)=rang$({}^t\varphi)$. On en déduit que

Lemme 12 – Pour toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, rang$(M)$=rang$({}^tM)$.

Le rang d'une matrice M est également égal au rang du système de ses vecteurs-lignes.

5. Changement de bases

5.1. Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de E.

Définition 13 – On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et on note $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice carrée d'ordre n dont la $j$ème colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathscr{B}$.

Cette matrice peut être considérée de deux manières :

- c'est la matrice de l'application $f : E \to E$ définie par $f(e_j) = e'_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, E étant rapporté à la base $\mathscr{B}$
- c'est la matrice de Id, E étant rapporté à la base $\mathscr{B}'$ au départ et à la base $\mathscr{B}$ à l'arrivée

Une matrice de passage est nécessairement inversible et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Soit $x \in E$. On note X (respectivement X') la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ (respectivement $\mathscr{B}'$). Alors on a

$$\boxed{X = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X'}$$

5.2. Changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Soient E un espace vectoriel de dimension p et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On note $T = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Soient F un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ deux bases de F. On note $U = P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}'_1}$ la matrice de passage de la base $_1$ à la base $\mathscr{B}'_1$.
Soit f une application linéaire de E dans F de matrice A, l'espace E étant rapporté à la base $\mathscr{B}$ et l'espace F à la base $\mathscr{B}_1$. Or

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff Y = AX \\ &\iff UY' = ATX \text{ car } Y = UY' \text{ et } X = TX' \\ &\iff Y' = (U^{-1}AT)X' \end{aligned}$$

La matrice A' représentant l'application f (l'espace E étant rapporté à la base $\mathscr{B}'$ et F à $\mathscr{B}'_1$) est donc $A' = U^{-1}AT$.
Ce que l'on peut retrouver par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathscr{B}) & \overset{f}{\rightarrow} & (F, \mathscr{B}_1) \\ T \uparrow & & \downarrow U^{-1} \\ (E, \mathscr{B}') & \underset{f}{\rightarrow} & (F, \mathscr{B}'_1) \end{array}$$

5.3. Matrices équivalentes

Définition 14 – On dit que deux matrices d'ordre (n, p) A et A' sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles U et T d'ordre n et p respectivement telles que $A' = U^{-1}AT$.

On peut vérifier que cette relation sur les matrices est une relation d'équivalence.

Corollaire 15 – Deux matrices équivalentes ont le même rang.

En effet, la composée d'une application g par une application bijective f a le même rang que g.

Théorème 16 – Soit A une matrice d'ordre (n, p) et de rang r. Alors A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{p-r,p-r} \end{pmatrix}$$

où $0_{i,j}$ représente la matrice d'ordre (i, j) dont tous les coefficients sont nuls.

Démonstration : la matrice A représente une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, les deux espaces étant rapportés à leurs bases canoniques respectives $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$. Le système $\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$ étant de rang r, on peut en extraire un système libre de r vecteurs. Supposons, pour simplifier l'écriture que ce soit $\big(f(e_1), \ldots, f(e_r)\big)$. On complète en une base $\big(f(e_1), \ldots, f(e_r), f'_{r+1}, \ldots, f'_n\big)$ de $\mathbb{K}^n$.
$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ est en somme directe avec $\mathrm{Ker}\, f$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$, alors $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$. Donc $f(x) = 0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(e_i)$ et $\big(f(e_1), \ldots, f(e_r)\big)$ est un système libre. De plus $\dim \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f)$.

On complète donc le système $(e_1, \ldots, e_r)$ avec une base $(e'_{r+1}, \ldots, e'_p)$ de $\mathrm{Ker}\, f$ et on obtient une base de $\mathbb{K}^p$.

La matrice de f dans ces deux nouvelles bases a bien la forme annoncée. $\sqcup$

Corollaire 17 – Il y a $\inf(p, n) + 1$ classes d'équivalence dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour la relation définie précédemment.

Corollaire 18 – Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Deux matrices rectangulaires sont équivalentes si elles peuvent représenter la même application linéaire.

5.4. Matrices semblables

Définition 19 – On dit que deux matrices d'ordre n A et A' sont semblables s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que $A' = P^{-1}AP$.

On peut vérifier que cette relation sur les matrices est une relation d'équivalence.

Corollaire 20 – Deux matrices semblables ont le même rang.

Attention, la réciproque est fausse : par exemple, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ont le même rang (2), mais elles ne sont pas semblables car la matrice $P^{-1}AP$ est toujours égale à A et ne peut donc pas être égale à B.

Attention : deux matrices carrées semblables ont même rang, donc sont équivalentes. Par contre, il existe des matrices carrées équivalentes mais qui ne sont pas semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles sont équivalentes puisqu'elles sont toutes les deux de rang 1. Supposons qu'elles soient semblables. Alors $A = P^{-1}BP$, donc $A^2 = P^{-1}B^2P$. Or un calcul direct donne $A^2 = A$ et $B^2 = 0$. Contradiction.

Deux matrices carrées sont semblables si elles peuvent représenter le même endomorphisme.

5.5. Matrices congruentes

Définition 21 – On dit que deux matrices **symétriques** d'ordre n A et A' sont congruentes s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que $A' = {}^tPAP$.

Proposition 22 – Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice symétrique A d'ordre n est congruente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où r est le rang de la matrice A.

Théorème 23 – Deux matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes si et seulement si elles ont même rang. Il y a $n+1$ classes de congruence.

Proposition 24 – Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toute matrice symétrique d'ordre n est congruente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le couple d'entiers (s, t) est appelé signature de A.

Deux matrices symétriques sont congruentes si elles peuvent représenter la même forme quadratique.

Les résultats liés à cette relation sont démontrés dans le chapitre sur les formes quadratiques.

MATRICES