

CAPESA 2001

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n ($n \geq 2$). Pour tout endomorphisme u de E , on désigne par φ_u l'application définie sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall v \in \mathcal{L}(E), \varphi_u(v) = u \circ v - v \circ u.$$

I . Préliminaires

1. Vérifier que, pour tout endomorphisme u de E , φ_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Pour tout nombre complexe λ , déterminer $\varphi_{\lambda Id_E}$.
3. Montrer que, pour tout endomorphisme u de E , $\dim(\text{Ker}(\varphi_u)) \geq 2$.

II . Étude d'un exemple.

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$ et on désigne par $B = (e_1, e_2)$ une base de E .

Soit u l'endomorphisme de E tel que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ soit la matrice de u relativement à la base B .

1. u est-il un endomorphisme diagonalisable ?

On considère M_1, M_2, M_3 et M_4 les matrices à coefficients complexes d'ordre 2 définies par

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on désigne par $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 les endomorphismes de E dont les matrices relativement à la base B sont respectivement M_1, M_2, M_3 et M_4 . Ainsi $C = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2. Déterminer la matrice Δ de φ_u relativement à C .
3. φ_u est-il diagonalisable ? Préciser les valeurs propres non nulles de φ_u et la dimension de $\text{Ker}(\varphi_u)$.
4. Déterminer le sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de φ_u .

III . Étude du cas où u est diagonalisable.

Dans cette partie, on suppose que u est un endomorphisme diagonalisable de E . On désigne par $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E constituée de vecteurs propres de u . Pour tout $(i, j) \in [1; n]^2$, on définit l'endomorphisme $v_{i,j}$ de E par :

$$v_{i,j}(\varepsilon_i) = \varepsilon_j \text{ et } v_{i,j}(\varepsilon_k) = 0_E \text{ si } k \neq i.$$

1. Prouver que $v_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_u .
2. En déduire que φ_u est diagonalisable.
3. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes et $V(\lambda_1), \dots, V(\lambda_r)$ les sous-espaces propres associés de dimensions respectives $n_1, \dots, n_r$.
 - a) Quelle relation vérifient $n, n_1, \dots, n_r$?
 - b) Exprimer la dimension de $\text{Ker}(\varphi_u)$ et le rang de φ_u en fonction de $n_1, \dots, n_r$.

IV . Étude du cas où φ_u est diagonalisable.

On suppose maintenant que φ_u est diagonalisable.

1. Soit x un vecteur donné de E , non nul.
 - a) Montrer que : $\forall y \in E, \exists w \in \mathcal{L}(E), y = w(x)$.
 - b) Montrer qu'il existe une base de E notée $B(x)$ telle que $B(x) = (v_k(x))_{1 \leq k \leq n}$, où, pour tout $k \in [1; n]$, v_k est un vecteur propre de φ_u .
2. Démontrer que u est diagonalisable.
3. Montrer que : $\varphi_u = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, u = \lambda Id_E$.

V . Une propriété des vecteurs propres de φ_u .

Dans cette partie, on suppose que φ_u admet une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et v désigne un vecteur propre, non nul, de φ_u associé à λ .

- 1-a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, v^k est un vecteur propre de φ_u et préciser la valeur propre associée.
b) En déduire que v est un endomorphisme nilpotent. Quel est l'indice maximal de v ?
2. Dans cette question, on suppose que v est nilpotent d'indice n .
a) Montrer que, pour tout naturel k tel que $1 \leq k \leq n-1$, $\dim(\text{Ker}(v^k)) < \dim(\text{Ker}(v^{k+1}))$.
b) Pour tout naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, déterminer $\dim(\text{Ker}(v^k))$.
c) Démontrer que φ_u est diagonalisable.

