Université de Rennes 1 | Licence 1ère année
UFR Mathématiques | module A04
Feuille de TD n°5 | Année 2004-2005

COMPRÉHENSION DE LA NOTION D'APPLICATIONS

Exercice n°1

Déterminer toutes les applications h de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même telles que pour tout x et tout y de E, on ait $h(x + y) = h(x) + h(y)$.

Exercice n°2

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $A = \{f \in E\,;\, f(3) = 2f(1)\}$.

1) L'application $g : x \mapsto x^2$ appartient-elle à A ? Même question pour $h : x \mapsto x + 1$.

2) A quelle condition sur a et b, l'application $f : x \mapsto a\,x + b$ appartient-elle à A ?

Exercice n°3

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1) Les applications définies ci-dessous appartiennent-elles à A ?

a) f est une application constante

b) $f : x \mapsto 3x - 1$

c) $f : \left[\begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \neq 0 \end{array}\right.$

d) $f : \left[\begin{array}{l} 1 \mapsto 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \neq 1 \end{array}\right.$

2) On suppose que f appartient à A.

a) Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(4t) = f(t)$.

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

COMPOSITION D'APPLICATIONS

Exercice n°4

Soit l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ et g l'application définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x - 1}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice n°5

On définit deux fonctions f et g sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x \text{ si } x \in [0, 1/2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, 1/2[\\ x - 1/2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

Exercice n°6

On définit deux applications f et g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0,1/3] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,2/3] \\ 3x-2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ? Trouver un sous-ensemble de $[0,1]$ sur lequel $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes restrictions.

Injection - Surjection - Bijection

Exercice n°7

Donner des fonctions réciproques des fonctions suivantes, en précisant le domaine de définition

1) $f_1(x) = \sqrt{x-1}$

2) $f_2(x) = \left[\begin{array}{r} 3/2 - x/2 \text{ si } x \leq 1 \\ 3 - 2x \text{ si } x > 1 \end{array}\right.$

Exercice n°8

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par $f(x) = x/(1+|x|)$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice n°9

Soit l'application f : $\left[\begin{array}{r} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x+5}{x-1}. \end{array}\right.$

1) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

2) Montrer qu'il existe un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ et une bijection g de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur F tels que $g(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer g^{-1}.

Exercice n°10

Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1) Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.

2) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

3) Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice n°11

Soient un ensemble E et f une application de E dans E.
On définit par récurrence sur n f^n par $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1) On suppose f injective. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, f^n est injective.

2) On suppose f surjective. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, f^n est surjective.

Antécédents et image

Exercice n°12

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.

1) Donner la définition de $f^{-1}(\{4\})$. Calculer $f^{-1}(\{4\})$.

2) L'application f est-elle bijective ?

3) Donner la définition de $f([-1, 1])$. Calculer $f([-1, 1])$.

4) Donner la définition de $f^{-1}([-2, 4])$. Calculer $f^{-1}([-2, 4])$.

Exercice n°13

Soit l'application E : $\left[\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto E(x) \text{ où } E(x) \text{ est l'unique } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leq x < n+1.\end{array}\right.$

1) Tracer le graphe de E pour $x \in [-2, 2]$.

2) L'application E est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3) Déterminer $E(]0, 2[), E^{-1}(]0, 2[), E\big(E^{-1}(]0, 2[)\big)$.

4) Expliciter $E \circ E$.

Exercice n°14

Soit l'application f : $\left[\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{2x} - 2e^x.\end{array}\right.$

1) Déterminer $f^{-1}(\{-3/4\})$.

2) L'application f est-elle injective ?

3) L'application f est-elle surjective ?

4) Déterminer $f([-\ln 2, \ln 2])$.

Exercice n°15

Soit l'application f : $\left[\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{z}{1+|z|}\end{array}\right.$ o $|z|$ désigne le module du complexe z.

1) Démontrer que, si $f(z) = f(z')$, alors $|z| = |z'|$. En déduire que f est injective.

2) On note $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$. Montrer que $f(\mathbb{C}) \subset D$.

3) L'application f est-elle une bijection de $\mathbb{C}$ sur D ?

Exercice n°16

Soit l'application f : $\left[\begin{array}{l}\mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \\ \qquad z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}.\end{array}\right.$

1) Déterminer l'image par f du disque $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$.

2) Déterminer l'image par f du demi-plan $A = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) < 1/2\}$.