Université de Rennes 1 — Licence 1ère année
UFR Mathématiques — module A04
Feuille de TD n°2 — Année 2004-2005

Ensembles et sous-ensembles

Exercice n°1

Donner une autre écriture des ensembles suivants

1) $E_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 18\}$

2) $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1.5 \leq |x| < 3\}$

3) $E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x < 10\}$

4) $E_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^4 - 22x^2 = 45\}$

Exercice n°2

Donner une autre écriture des ensembles suivants

1) $E_5 = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

2) $E_6 = \{\sin x \mid x \in [0, 2\pi]\}$

3) $E_7 = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \,\middle|\, x \in]-1, 1] \right\}$

Exercice n°3

Dessiner les ensembles suivants

1) $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x - 2y| > 1\}$

2) $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x - 2| \leq 1\}$

3) $E_3 = \mathbb{R}_+ \times [0, 5[$

Exercice n°4

1) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1\}$. Le point $(1,1)$ appartient-il à A ? Même question pour $(1,2)$. Si $(x,y) \in A$, a-t-on $(2x, 2y) \in A$?

2) Même question en remplaçant A par $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$.

3) Soit $C = \{(t+1, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = C$.

Exercice n°5

Soit A, B et C trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Exprimer $A \cap B$ et $A \cup C$ lorsque $A = [-1, 3[$, $B = \mathbb{Z}$ et $C = [1, 4]$

Exercice n°6

Représenter $\complement_E A$, $\complement_E B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ dans les cas suivants ;

1) $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E \mid x^2 - 3x + 1 < 0\}$ et $B = \{x \in E \mid x > 0\}$

2) $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}$.

Exercice n°7

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Exprimer $A \cap B$ et $A \cup B$ lorsque $A = \overline{B}$.

Exercice n°8

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes

1) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c)$ où A^c est le complémentaire de A dans E.

2) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$.

3) $[(A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C^c)] \cup [(A \cup B) \cap C]$

Exercice n°9

Soit $E = \{0, 1\}$.

1) Déterminer $\mathscr{P}(E)$

2) Déterminer $E \times E$ et $\mathscr{P}(E \times E)$.

Exercice n°10

Déterminer $E = \mathscr{P}(\emptyset)$ et $\mathscr{P}(E)$.

Exercice n°11

Soient E et F deux ensembles. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?

Exercice n°12

On appelle fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E, l'application e_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par : $e_A(x) = 0$ si $x \notin A$ et $e_A(x) = 1$ si $x \in A$.
Soient A et B deux sous-ensembles de E.

1) Montrer que $A = B$ si et seulement si $e_A = e_B$.

2) Exprimer les fonctions indicatrices de A^c, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$ en fonction de e_A et e_B.

Un peu de modélisation

Exercice n°13

Dans une grande librairie française, trois employés ont les attributions suivantes :
Jean s'occupe des livres politiques français et des romans étrangers reliés ;
Pierre s'occupe des livres politiques reliés et des romans français, sauf ceux qui sont politiques ;
Henri s'occupe des livres français reliés et des romans politiques non reliés.
Quels sont les livres qui sont de la compétence des trois employés ? d'aucun ?