Université de Rennes 1 2008–2009
UFR de Mathématiques Licence

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE (AL1)

Corrigé des exercices qu'il était prévu de traiter le lundi 9 mars 2009

page 18 à 27 ; exercices 2, 4, 26, 27, 32, 35, 50.

EXERCICE 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 4

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 26

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

EXERCICE 27

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \hline 19 & 16 \end{array}\right]$$

EXERCICE 32 *Existe-t-il une matrice 3×2, A, et une matrice 2×3, B, telles que le produit $A \cdot B$ soit égal à I_3 ?*

Indication : étant données des matrices A et B, de tailles 3×2, et 2×3, il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $B\vec{x} = \vec{0}$ (pourquoi ?). Considérez alors $AB\vec{x}$.

Solution : Pour chaque matrice B de taille 2×3 le système

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est consistant. Comme $rang(B) \leq 2$, au moins une variable est libre. Donc, le système possède une infinité de solutions, et au moins une solution non nulle $\vec{x}_0$ telle que $B\vec{x}_0 = \vec{0}$.

Pour tel vecteur $\vec{x}_0$ nous avons

$$AB\vec{x}_0 = A(B\vec{x}_0) = A\vec{0} = \vec{0} \neq \vec{x}_0 = I_3\vec{x}_0$$

Donc, $AB \neq I_3$.

EXERCICE 35 *Considérons une matrice $m \times n$, B, et une matrice $n \times m$, A, telles que $BA = I_m$.*

a. Déterminez toutes les solutions du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$.

Solution : Des arguments analogues à la solution du problème 32 montrent que la seule solution du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$ est la solution nulle, $\vec{x} = \vec{0}$.

b. Montrer que pour tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^m$, le système linéaire $B\vec{x} = \vec{b}$ est consistant.

Solution : Pour $\vec{x} = A\vec{b}$ on obtient

$$B\vec{x} = B(A\vec{b}) = (BA)\vec{b} = I_m\vec{b} = \vec{b}$$

Donc $\vec{x} = A\vec{b}$ est une solution du système $B\vec{x} = \vec{b}$.

c. Que pouvez-vous dire du rang de A ?

Solution : D'après la partie a, la seule solution du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$ est la solution nulle. Cela implique que le système n'a pas de variables libres. Donc toutes les m variables sont des variables de pivot. Donc $rang(A) = m$.

c'. Que pouvez-vous dire du rang de B ?

Solution : La partie b implique que $frel(B)$ ne contient pas de lignes nulles (comparez avec l'exercise 2.3.51a). Donc chaque ligne de $frel(B)$ contient un pivot. Comme la même ligne ne peut pas contenir deux pivots, le nombre des pivots dans $frel(B)$ est égale au nombre des lignes. Donc $rang(B) = m$

d. Justifiez que l'on a l'inégalité $m \leq n$.

Solution : Pour une matrice $m \times n$, B quelconque $rang(B)$ satisfait :

$$rang(B) \leq \min(n, m)$$

Comme $rang(B) = m$ cela implique que $m \leq \min(n, m)$, donc $m \leq n$.

EXERCICE 50 *Considérons la matrice*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi qu'une matrice arbitraire 3×3,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

a. Calculer EA. Comparez A et EA, compte tenu de la technique d'élimination étudiée au paragraphe 1.2.

Solution :

$$EA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3a & f-3a \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

La matrice EA est obtenue de la matrice E par une opération élémentaire suivante : on remplace la deuxième ligne de la matrice A par la deuxième ligne moins trois fois la première ligne :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} II - 3(I)$$

b. Considérons la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi qu'une matrice arbitraire 3×3, *A. Calculez* EA. *Quels commentaires faites-vous à propos du lien entre* A *et* EA.

Solution :

$$EA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d/4 & e/4 & f/4 \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

La matrice EA est obtenue de la matrice E par l'opération élémentaire suivante : on multiplie la deuxième ligne de la matrice A par $\frac{1}{4}$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \frac{1}{4} II$$

c. Déterminez une matrice 3×3, E, *telle que* EA *soit obtenue à partir de* A *en échangeant les deux dernières lignes (*A *étant une matrice* 3×3 *arbitraire).*

Solution :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Les matrices de la forme introduite aux questions a), b), c) sont appelées élémentaires : une matrice $n \times n$ *est dite élémentaire si elle est obtenue à partir de* I_n *par l'une des trois opérations élémentaires sur les lignes de* I_n. *Décrivez la forme des trois types de matrices élémentaires.*

Indication : Généraliser a)-c)