Devoir pour le lundi 9 février

Ex 2 page 7

La matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'angle θ est la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Une angle de $60°$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre correspond à $\theta = +\frac{\pi}{3}$. Donc

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ex 9 page 7

L'application linéaire T donnée par

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

est une transvection verticale.

Ex 17 page 8

<u>Indication</u>. Pour trouver un vecteur $\vec{v}$, tel que $A\vec{v} = \vec{v}$ on peut reécrire l'équation de façon suivante:

$$A\vec{v} = \vec{v} \iff A\vec{v} - \vec{v} = 0 \iff A\vec{v} - I\cdot\vec{v} = 0 \iff (A-I)\,\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

Pour trouver un vecteur $\vec{w}$, tel que $A\vec{w} = -\vec{w}$ on peut resoudre l'equation suivante:

$$A\vec{w} = -\vec{w} \iff A\vec{w} + \vec{w} = \vec{0} \iff A\vec{w} + I\cdot\vec{w} = \vec{0} \iff (A+I)\,\vec{w} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} a+1 & b \\ b & -a+1 \end{bmatrix} \vec{w} = \vec{0}$$

Ex 26 page 9

a) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow k = 4 \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\text{proj}_D : \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Donc, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D.
Donc D est la droite horizontale et

$B = \text{proj}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) La matrice d'une rotation a la forme $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{lcl} a \cdot 0 - b \cdot 5 & = & 3 \\ b \cdot 0 + a \cdot 5 & = & 4 \end{array} \right| , \text{ donc } C = \begin{vmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{vmatrix}$$

d) $T : \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 7 \\ 3 \end{vmatrix}$

Remarquons que la deuxième composante du vecteur ne change pas. Donc c'est une transvection horizonta

$D = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow k = 2 \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $E : \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

La matrice d'une réflexion a la forme $E = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 =$

Donc $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\left| \begin{array}{lcl} 7a + b & = & -5 \\ -a + 7b & = & 5 \end{array} \right| \quad \text{Solution: } E = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

27 page 9

La matrice B représente une homothétie $B = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

La matrice E répresente une transvection verticale $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

Pour distinguer les trois dernier applications on peut remarquer que

$$\det A = -1$$
$$\det C = 0$$
$$\det D = 1$$

Donc A represente une réflexion
C represente une projection
D represente une rotation.

(On peut aussi constater que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$, donc A represente une réflexion ; $D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$, donc D est une rotation).

39 page 10

Remarquons que pour une matrice 2×2

$$\det(kA) = k^2 \det A.$$

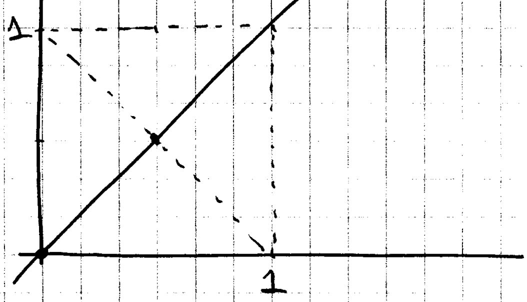
a) $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, on va essayer de demontrer que nous avons la composition d'une homothétie avec la projection

b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}$; donc la matrice represente une composition d'une homothétie et d'une transvection

c) $\det \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -25 = 5^2 \cdot (-1)$

On va essayer de demontrer que ici nous avons la composition d'une homothetie de coef. 5 avec une réflexion.

a



$$\vec{e}_1 \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Si nous avons une projection (composée avec une homothétie) alors la droite de projection est engendrée par $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. La matrice d'une telle projection est

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et nous constatons qu'effectivement

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot 2$$

c) Il suffit de verifier que les matrices

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{(-5)}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

ont la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

Donc, il y a deux façons de représenter cette application linéaire comme la composition d'une réflexion et d'une homothétie.

47 page 11

Indications

a) ...

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(T\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\right) \cdot \left(T\begin{bmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot T\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$$= -T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(0) = T\begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} \cdot T\begin{bmatrix} -\sin 0 \\ \cos 0 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f(0)$

c) ...

d) Notons que pour chaque $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ sont unitaires et perpendiculaires. Posons

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} \cos(c) \\ \sin(c) \end{bmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} -\sin(c) \\ \cos(c) \end{bmatrix}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est trouvé en c) (i.e. $f(c) = 0$).

Il reste à remarquer que

$$0 = f(c) = T(\vec{v_1}) \cdot T(\vec{v_2})$$