Devoir pour lundi 2 mars

7

$$\operatorname{frel}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \neq I_3$$

Cette matrice n'est pas inversible.

8

$$\left[\overbrace{\begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix}}^{A}\ \middle|\ \overbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{I_3}\right]$$

Echanger 1ère et 3ème lignes

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I_3}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

Donc $A = A^{-1} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

9

$$\operatorname{frel}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \neq I_3$$

Cette matrice n'est pas inversible

11

$$\left[\overbrace{\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{A}\ \middle|\ \overbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{I_3}\right] \quad \mathrm{I}-\mathrm{III}$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I_3}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

29

⓪ $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&K\\1&4&K^2\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}\\ \mathrm{II}-\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-\mathrm{I}\end{matrix}$

① $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&K-1\\0&3&K^2-1\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}\mathrm{I}-\mathrm{II}\\ \\ \mathrm{III}-3\mathrm{II}\end{matrix}$

② $\begin{bmatrix}1&0&2-K\\0&1&K-1\\0&0&K^2-3K+2\end{bmatrix}$

$\operatorname{frel}(A) = I_3$ ssi $K^2-3K+2 \neq 0$

$K \neq 1; 2$

La matrice est inversible si et seulement si $K \notin \{1; 2\}$

32) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad ad - bc = 1 \quad A^{-1} = A \quad (*)$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ (pour toutes matrices inversibles 2×2)

Donc, si $ad - bc = 1$ et $A^{-1} = A$ on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} d = a \\ -b = b \\ -c = c \\ d = a \end{cases}$$

Ce système implique que $b = c = 0$ et $a = d$.

La condition $ad - bc = 1$ devient $a^2 = 1$.

Il y a deux matrices telles que $ad - bc = 1$ et $A^{-1} = A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

33) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

A est inversible ssi $\det A \neq 0$. $\det(A) = -(a^2 + b^2) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{-(a^2+b^2)} \begin{bmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{a^2+b^2} = a \qquad -\frac{a}{a^2+b^2} = a$$

$$\frac{b}{a^2+b^2} = b \qquad \frac{b}{a^2+b^2} = b$$

On obient la condition nécessaire suivante :
$a^2+b^2=1$.

D'autre part, pour $a^2+b^2=1$ la matrice
$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ est une matrice de réflexion.

Une telle matrice A est toujours inversible et $A^{-1}=A$. Donc la condition nécessaire et suffisante est $a^2+b^2=1$

35| <Le réponses:>

a) A est inversible $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ d \neq 0 \\ f \neq 0 \end{cases}$

b) Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si toutes les éléments diagonaux sont non nuls.

c) Oui

d) Une matrice triangulaire inférieure est inversible si et seulement si toutes les éléments diagonaux sont non nuls.

41| a) La réflexion T par rapport à un plan est toujours inversible ; $T^{-1}=T$

b) La projection sur un plan n'est jamais inversible.

c.) Une homothétie de rapport 5 est inversible ; son inverse est une homothétie de rapport $1/5$

d) Une rotation autour d'un axe est inversible l'inverse est une rotation autour du même axe dans le sens inverse par le même angle

48| $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$

Ou, plus generalement

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ où $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ est inversible,

où $k_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix}$

et $k_1 b_1 + k_2 b_2 = b_3$.

54| $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$ $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 10 \\ -3 & 12-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff (1-\lambda)(12-\lambda) - 10\cdot(-3) = 0$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 42 = 0$$

$$\lambda = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 168}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = 6\ ;\ 7$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 6}}$

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 7}}$ $A - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = k \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$