Chapitre 2 §1

Introduction aux application linéaires

3 page 1

$$y_1 = x_2 - x_3$$
$$y_2 = x_1 x_3$$
$$y_3 = x_1 - x_2$$

L'application n'est pas linéaire ($x_1 x_3$ n'est pas une fonction linéaire). En particulier

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(2\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix} = 4\cdot T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \neq 2T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

Pour une application linéaire on a

$$T(k\cdot\vec{v}) = k\cdot T(\vec{v}) \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{v} \in \mathbb{R}^m$$

---

7 page 1

$$T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_m\vec{v}_m .$$ Donc, pour la matrice

$$A = \begin{bmatrix}| & & |\\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_m\\ | & & |\end{bmatrix}$$ composé des vecteurs-colonnes $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m$

on obtient $T\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{bmatrix} = A\cdot\vec{x}$. Donc l'application

est linéaire ; la matrice de l'application est

$$A = \begin{bmatrix}| & & |\\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_m\\ | & & |\end{bmatrix}$$

9 page 1 La matrice 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Si la matrice est inversible alors

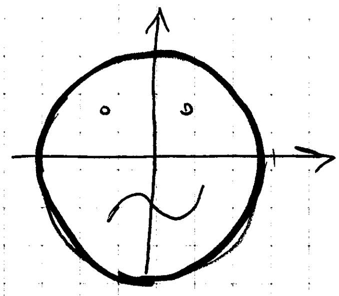
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Pour $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ nous avons

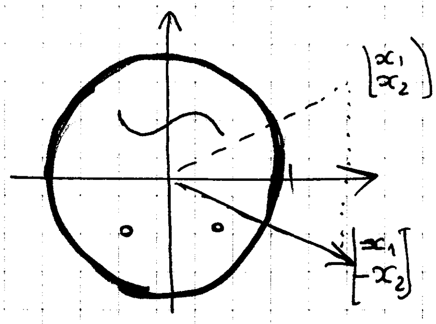
$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 0$ donc la matrice n'est pas inversible.

(On peut remarquer également que rang $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 < 2$, donc la matrice n'est pas inversible.)

27 page 2



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

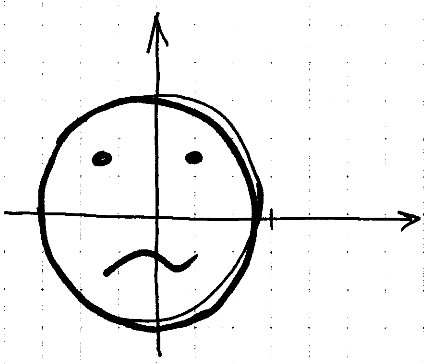


C'est une Reflexion par rapport à la droite (Ox)

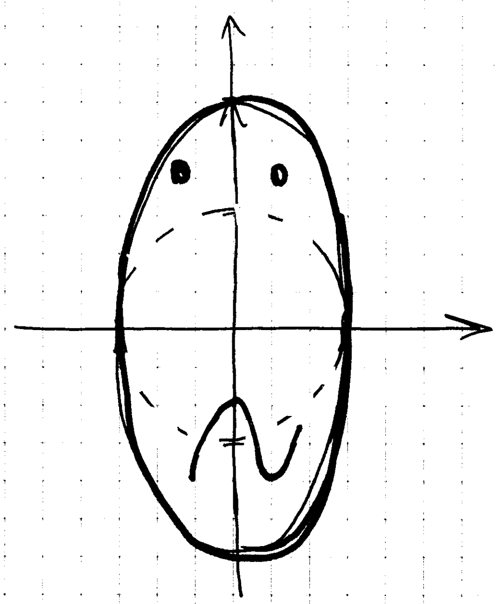
$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{vmatrix}$$

Fait attention à la forme de la bouche!
C'est bien une réflexion, ce n'est pas une rotation d'angle π!

28 page 2

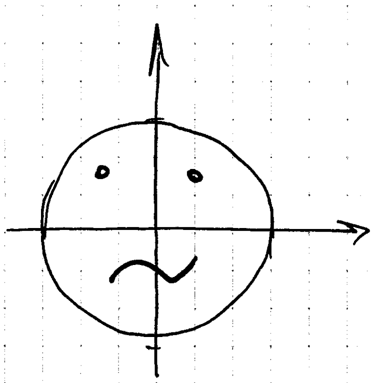


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

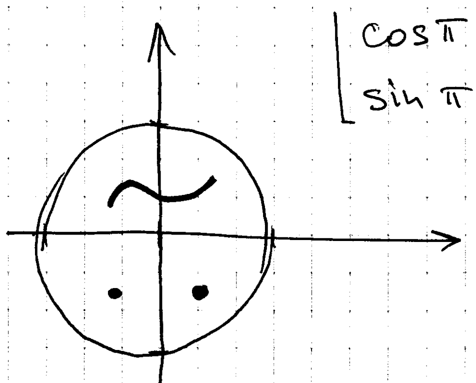


29 page 2

C'est une rotation d'angle π = symmetrie centrale

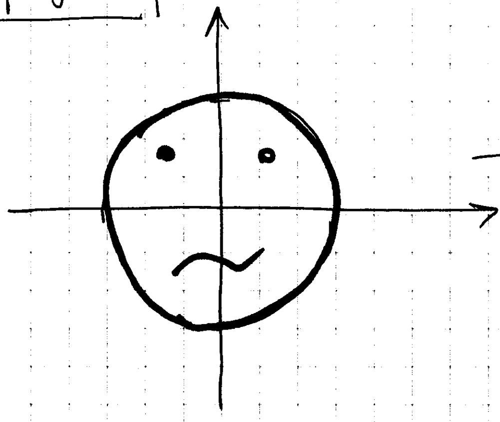


$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

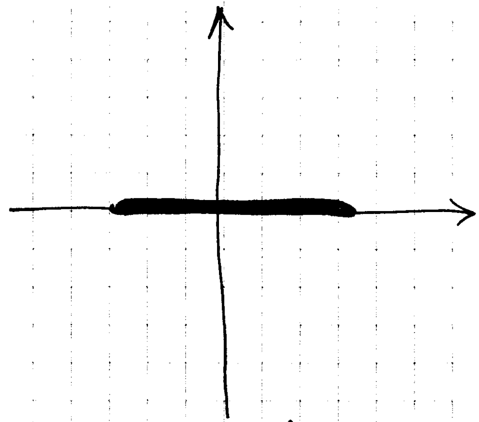


$$\begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}$$

30 page 2



$$\xrightarrow{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$



On reconnait une projection sur la droite verticale (Oy)

(Comparez avec la formule : notes de cours §2.2, page 7 $\begin{bmatrix}u_1^2 & u_1u_2\\ u_1u_2 & u_2^2\end{bmatrix}$ où

$\vec{u}$ — un vecteur directeur unitaire de la droite.

Dans notre cas $\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, donc

$$\begin{bmatrix}u_1^2 & u_1u_2\\ u_1u_2 & u_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

35 page 3

Notons la matrice de codage $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

Nous savons que

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\42\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}89\\52\end{bmatrix}$$

et que

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\41\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}88\\53\end{bmatrix}$$

ce que correspond aux quatre équations suivantes

$$\left|\begin{array}{l} 5a + 42b = 89\\ 5c + 42d = 52\\ \\ 6a + 41b = 88\\ 6c + 41d = 53 \end{array}\right|$$

On obtient deux systèmes linéaires :

$$(*)\ \left|\begin{array}{l} 5a + 42b = 89 \\ 6a + 41b = 88 \end{array}\right| \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{l} 5c + 42d = 52 \\ 6c + 41d = 53 \end{array}\right| (**)$$

Notons que la matrice de coefficients est la même dans les deux systèmes :

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 42 \\ 6 & 41 \end{vmatrix}$$

Notons aussi que $\operatorname{rang} A = 2$. Donc, chaque système a une unique solution, donc on peut casser le code.

Démonstration que $\operatorname{rang} A = 2$

① $\begin{vmatrix} 5 & 42 \\ 6 & 41 \end{vmatrix} \ \mathrm{I}/5$ ② $\begin{vmatrix} 1 & 42/5 \\ 6 & 41 \end{vmatrix} \ \mathrm{II} - 6\mathrm{I}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 & 42/5 \\ 0 & -\frac{47}{5} \end{bmatrix}$

$$41 - \frac{42}{5} \cdot 6 = \frac{41 \cdot 5 - 42 \cdot 6}{5} = -\frac{47}{5}$$

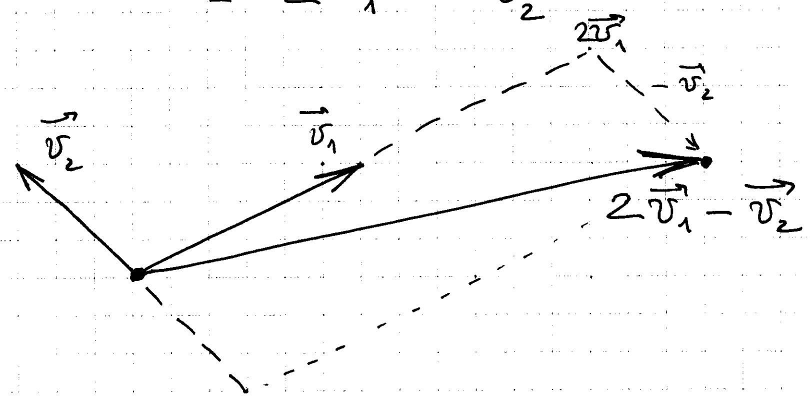
A partir de ③ on voit que $\operatorname{frel}\begin{vmatrix} 5 & 42 \\ 6 & 41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

38 page 3

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} \\ | & | \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \vec{v_1} = T(\vec{e_1}) \\ \vec{v_2} = T(\vec{e_2}) \end{array}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = T(2\vec{e_1} - \vec{e_2}) = 2T(\vec{e_1}) - T(\vec{e_2}) =$$

$$= 2\vec{v_1} - \vec{v_2}$$



50 page 5

b)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{masse} = \text{densité} \cdot \text{volume} \\ \text{volume} = \frac{1}{\text{densité}} \cdot \text{masse} \end{array}}$$

Donc le volume qui corresponds à une masse m_p de platine est $\frac{1}{20} \cdot m_p$ (cm^3) où on suppose que m_p est mésurée en grammes.

Le volume qhi correspond à une masse m_a (gramm d'argent est $\frac{1}{10} \cdot m_a$ (cm^3). Donc

$$\begin{bmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{bmatrix} \begin{array}{c} = \\ = \end{array} \begin{bmatrix} m_p + m_a \\ \frac{1}{20} m_p + \frac{1}{10} m_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/20 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_p \\ m_a \end{bmatrix}$$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/20 & 1/10 \end{bmatrix}$ La matrice est inversible.

On peut utiliser la formule $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

pour trouver $A^{-1} = 20 \begin{bmatrix} 1/10 & -1 \\ -1/20 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -20 \\ -1 & 20 \end{bmatrix}$

a) Pour une couronne d'une masse totale de 5000 grammes et du volume total de 370 cm³ on obtient

$$\begin{bmatrix} \text{masse de l'allige de platine} \\ \text{masse de l'alliage d'argent} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -20 \\ -1 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5000 \\ 370 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2600 \\ 2400 \end{bmatrix}$$

L'alliage de platine constitue $\frac{2600}{5000} \cdot 100 = \frac{52}{100} \cdot 100 = 52\%$

Le joaillier est donc un escroc.

53 page 6 | On sait que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{c|cccc|c} & € & \$ & ¥ & £ & \\ \hline & * & 0.8 & * & 1.5 & € \\ & * & * & * & * & \$ \\ & * & * & * & 200 & ¥ \\ & * & * & * & * & £ \end{array}$$

Comme 1 € vaut 1 € on constate que $a_{11} = 1$

D'après a_{34} nous avons 1 £ = 200 ¥

D'après a_{14} nous avons 1 £ = 1.5 €

Donc $1¥ = \frac{1}{200}£ = \frac{1}{200}(1{,}5€) = \frac{1.5}{200}€ = \frac{3}{400}€$

Nous avons trouvé que $a_{13} = 3/400$ et, donc, la première ligne de notre matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 3/400 & 1.5 \end{pmatrix}$$

On peut faire des observations suivantes:

a) $a_{ii} = 1$ pour $i = 1, 2, 3, 4$

b) $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ji}}$ pour $1 \leq i, j \leq 4$

c) Les lignes de notre matrice sont proportionnelles car le rapport

$$(1€) : (1\,\$) : (1\,¥) : (1\,Ұ)$$

ne dépend pas de la monnaie qu'on utilise pour evaluer 1€, 1\$, 1¥, 1Ұ corresp.

D'après les observations a) et b) on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 3/400 & 1.5 \\ \frac{10}{8} & 1 & * & * \\ \frac{400}{3} & * & 1 & 200 \\ \frac{10}{15} & * & \frac{1}{200} & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'observation c) on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 3/400 & 3/2 \\ 5/4 & 1 & 3/320 & 15/8 \\ 400/3 & \frac{320}{3} & 1 & 200 \\ 2/3 & 8/15 & 1/200 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.0075 & 1.5 \\ 1.25 & 1. & 0.009375 & 1.875 \\ 133.34 & 106.67 & 1 & 200 \\ 0.6667 & 0.5334 & 0.005 & 1 \end{pmatrix}$$