INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE (AL1)

Examen du 10 février 2009, 10h15 (15 minutes)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses

---

NOM : **Prénom :**

EXERCICE 1

1) Déterminez la matrice A de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sur la droite D engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Justifiez votre réponse.

2) Déterminez la matrice B de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Justifiez votre réponse.

Solution : (Comparez avec l'exemple 2, page 6, section 2.2 des notes de cours)

1) La matrice d'une projection a la forme $\begin{bmatrix}u_1^2 & u_1u_2\\ u_1u_2 & u_2^2\end{bmatrix}$ où $\vec{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite D. Le vecteur $\vec{u}$ est défini par $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Pour $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ nous avons $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Donc $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ et

$$A = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5}\\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{4}{5}\end{bmatrix}.$$

2) La matrice B d'une symétrie a la forme $\begin{bmatrix}2u_1^2-1 & 2u_1u_2\\ 2u_1u_2 & 2u_2^2-1\end{bmatrix}$ où $\vec{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite D. En utilisant le vecteur $\vec{u}$ déterminé dans la partie 1, nous obtenons :

$$B = \begin{bmatrix}-\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5}\\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

Tournez svp

EXERCICE 2

Déterminez parmi les affirmations suivantes, celles qui sont vraies ou fausses. Dans chaque cas justifiez votre réponse.

1) La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ est une matrice de symétrie.

2) La matrice $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice de projection.

Solution :

1) La matrice d'une symétrie a la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ où $a^2 + b^2 = 1$. Donc le determinant d'une matrice de symétrie est égal à -1.

Comme

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$

la matrice ne représente pas une symétrie et l'affirmation est fausse.

2) La matrice d'une projection a la forme $\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}$ où $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Donc le determinant d'une matrice de projection est égal à 0.

Comme

$$\det \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1^2 - (\sqrt{3})^2\right) \neq 0$$

la matrice ne représente pas une projection et l'affirmation est fausse.