Université de Rennes 1 — 2008–2009
UFR de Mathématiques — Licence

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE (AL1)

Examen du 3 février 2009, 10h15 (15 minutes)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses

---

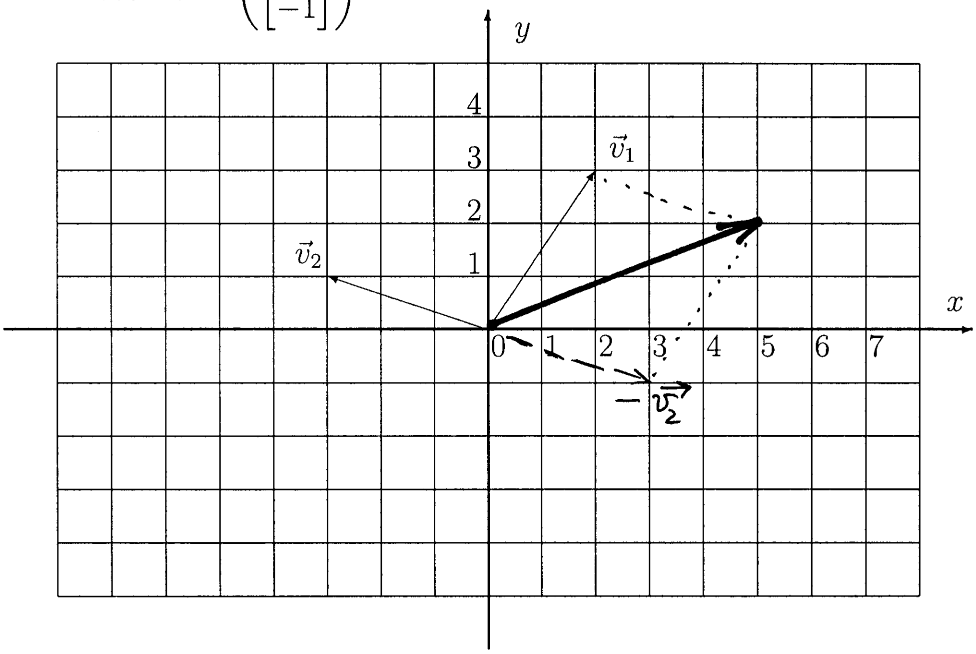
NOM : **Prénom :**

EXERCICE 1

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, comme sur la figure. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\vec{v}_1 = T(\vec{e}_1)$ et $\vec{v}_2 = T(\vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Trouver la matrice A de l'application linéaire T.

b) Tracer le vecteur $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.



a) D'après un théorème du cours (chapitre 2, section 1, page 9), le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice A est le vecteur $T(\vec{e}_j)$. Donc, comme $T(\vec{e}_1) = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $T(\vec{e}_2) = \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, on obtient $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Tournez svp

EXERCICE 2

Parmi les applications de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ données dans les exemples a et b, lesquelles sont linéaires ? (Le vecteur $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ indiqué est l'image du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.) Pour les applications linéaires trouver les matrices des applications linéaires. Justifiez toutes vos réponses.

a) $$\begin{aligned} y_1 &= x_3 \\ y_2 &= -x_4 \\ y_3 &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Pour} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nous avons $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$. Donc l'application est linéaire.

b) $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_3 \\ y_2 &= x_1 + 3x_2 + x_4 + 4 \\ y_3 &= 2 - x_1 - x_3 \end{aligned}$$

$$\text{Remarquons que } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Cependant pour toute application linéaire T

$$T(\vec{0}) = \vec{0}.$$

On constate que l'application n'est pas linéaire.