UNIVERSITÉ DE RENNES 1
UFR DE MATHÉMATIQUES

2008–2009
LICENCE

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE (AL1)

EXAMEN DU 3 FÉVRIER 2009, 16H15 (15 MINUTES)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses

---

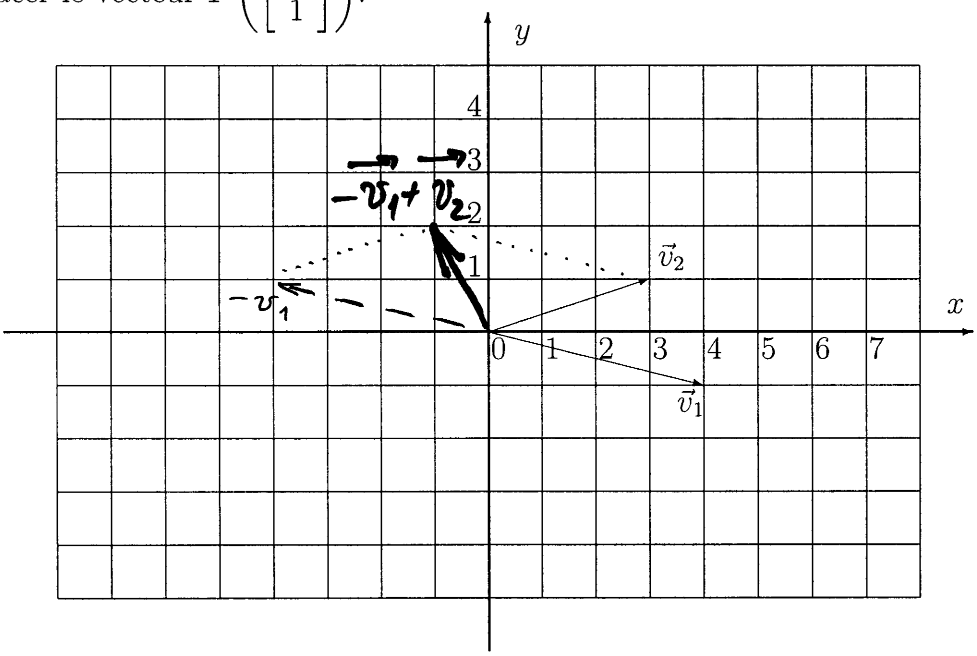
NOM : **Prénom :**

EXERCICE 1

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, comme sur la figure. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\vec{v}_1 = T(\vec{e}_1)$ et $\vec{v}_2 = T(\vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

a) Trouver la matrice A de l'application linéaire T.

b) Tracer le vecteur $T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$.



a) D'après un théorème du cours (chapitre 2, section 1, page 9), le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice A est le vecteur $T(\vec{e}_j)$. Donc, comme $T(\vec{e}_1) = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$ et $T(\vec{e}_2) = \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, on obtient $A = \begin{bmatrix}4 & 3\\-1 & 1\end{bmatrix}$.

b) $T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = -T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = -T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) =$

$= -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$.

Tournez svp

EXERCICE 2

Parmi les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ données dans les exemples 1 à 3, lesquelles sont linéaires ? (Le vecteur $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ indiqué est l'image du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.) Pour les applications linéaires trouver les matrices des applications linéaires. Justifiez vos réponses.

a) $$\begin{aligned} y_1 &= -x_2 \\ y_2 &= -x_3 \\ y_3 &= -x_2 \\ y_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Pour} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nous avons $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$. Donc l'application est linéaire.

b) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 \\ y_2 &= -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2 \\ y_3 &= 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3 \\ y_4 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Remarquons que} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Cependant pour toute application linéaire T

$$T(\vec{0}) = \vec{0}.$$

On constate que l'application n'est pas linéaire.