3.3. DIMENSION D'UN SOUS-ESPACES DE $\mathbb{R}^n$

Soit V un plan dans $\mathbb{R}^3$. Intuitivement, on observe que toute base de V est constituée de deux vecteurs. En fait chaque paire de vecteurs non parallèles dans V fera l'affaire. En effet, un seul vecteur est insuffisant pour

Figure 1: 1

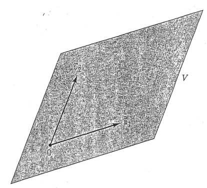


Figure 1 The vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ form a basis of V.

engendrer V et trois ou plus vecteurs dans V sont linéairement dépendants et donc ne forment pas une base de V.

On conjecture donc d'une manière générale que, étant donné un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, chaque base de V possède le même nombre d'éléments. Cette conjecture est vraie, et pour démontrer ce théorème fondamental, on a besoin du lemme intermédiaire suivant.

> Propriété 3.3.1.
> Soit V un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$. On considère deux familles de vecteurs dans V, $(\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p)$ et $(\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_q)$. On suppose que la famille $(\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p)$ est une famille libre et que la famille $(\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_q)$ et génératrice, i.e. que $V = vect(\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_q)$. Alors on a $p \leq q$.

Par exemple, soit V un plan dans $\mathbb{R}^3$. Intuitivement on constate que l'on peut trouver au plus deux vecteurs linéairement indépendants dans V, mais par ailleurs que l'on a besoin d'au moins deux vecteurs pour engendrer V. Donc $q \geq 2$ tandis-que $p \leq 2$. Donc l'inégalité $p \leq q$ semble raisonnable dans ce cas.

Démonstration. La preuve donnée ici est technique et même frustrante. Mais elle a le mérite de fonctionner avec les résultats développés dans ce cours.

Considérons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{w}_1 & \overrightarrow{w}_2 & \cdots & \overrightarrow{w}_q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_p \end{bmatrix}$$

Puisque $V = vect(\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_q)$, alors $\mathrm{Im}(A) = V$. Par ailleurs, les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p$ sont dans $\mathrm{Im}(A)$. Par conséquent il existe $\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_p$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^q$ tels que

$$\overrightarrow{v}_1 = A\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p = A\overrightarrow{u}_p.$$

On peut combiner ces équations et écrire

$$B = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_p \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \overrightarrow{u}_1 & \overrightarrow{u}_2 & \cdots & \overrightarrow{u}_p \end{bmatrix} = AC$$

Le noyau de C est un sous-espace vectoriel du noyau de B : si $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, alors $B\overrightarrow{x} = AC\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Mais comme les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p$ sont linéairement indépendants, $\mathrm{Ker}(B) = \{\overrightarrow{0}\}$, de sorte que l'on a également $\mathrm{Ker}(C) = \{\overrightarrow{0}\}$. Cela implique que la matrice C admet plus de lignes que de colonnes, c'est-à-dire $q \geq p$ comme annoncé.

Théorème de la dimension. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Chaque base de V admet le même nombre de vecteurs.

Démonstration. On rappelle qu'une base est une famille libre et génératrice. Soit $(\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p)$ et $(\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_q)$ deux bases de V. Puisque $V = vect(\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_q)$ et que $(\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p)$ est libre, alors

$$p \leq q.$$

Puisque $V = vect(\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p)$ et que $(\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_q)$ est libre, alors

$$q \leq p.$$

Par conséquent,

$$p = q,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Soient D et P respectivement une droite et un plan dans $\mathbb{R}^3$. Une base de D est constituée d'un vecteur non nul (n'importe quel vecteur non nul de D fait l'affaire), tandis-qu'une base de P est constituée de deux vecteurs. Une base de $\mathbb{R}^3$ est constituée de trois vecteurs (la base canonique déjà rencontrée, $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ est un choix possible). Dans chaque cas, le nombre de vecteurs de la base correspond à l'idée intuitive que l'on se fait de la notion de dimension.

> Tout sous-espace vectorielde $\mathbb{R}^n$ admet une base.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $V \neq \{\overrightarrow{0}\}$, choisissons $\overrightarrow{v}_1$ non nul dans V. Si $vect(\overrightarrow{v}_1)$ n'est pas égal à V on peut chosir un vecteur $\overrightarrow{v}_2$ dans V qui ne soit pas dans la droite $vect(\overrightarrow{v}_1)$. Si $vect(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ n'est pas égal à V on peut chosir un vecteur $\overrightarrow{v}_3$ dans V qui ne soit pas dans le plan $vect(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$. On peut continuer cette construction .... Elle se termine quand on a atteint une base de V, comprenant un nombre de vecteurs $\leq n$, puisqu'on a déjà vu qu'il ne peut pas y avoir dans $\mathbb{R}^n$ plus de n vecteurs linéairement indépendants voir 3.2 page 10).

> **Dimension**.
>
> Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Le nombres de vecteurs constituant une base de V est appelé la *dimension* de V et notée $\dim(V)$.

La notion algébrique de dimension est une avancée majeure dans le dévelopement de l'algèbre linéaire, et dans les mathématiques en général. Cela permet de concevoir des espaces de dimension plus grande que 3. Cela correspond à une idée mystique populaire qui cherche par exemple "la $4^{\text{ième}}$ dimension".

Le mathématicien allemand Hermann Weyl (1855-1955) disait les choses dans ce sens :

"Rien ne nous oblige à chercher l'illumination par des doctrines mystiques ou spirituelles pour avoir une vision claire de la géométrie multidimensionnelle".

Le premier mathématicien qui a pensé à la notion de dimension était le mathématicien français Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). Dans un article sur la dimension dans *l'encyclopédie*, il écrit :

Le fait de considérer des structures ayant plus de 3 dimensions n'est jamais qu'un droit comme un autre, parce des lettres peuvent toujours représenter des nombres, qu'ils soient rationnels ou non. J'ai dit précédemment qu'il nétait pas possible de concevoir plus que 3 dimensions. Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatrième dimension. Cette idée peut-être contestée, mais elle *a, ce me semble, quelque mérite, quand ce serait que celui de la nouveauté.*

Cet homme d'esprit était sans doutes d'Alembert, prudent puisqu'il savait qu'en ces temps une telle idée était risquée. Du reste, le non conformisme est toujours très risqué quand il remet des dogmes en question....

L'idée de dimension a été plus tard systématiquement étudiée par le mathématicien allemand Herman Günter Grassmann (1809-1877), qui a introduit la notion de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En fait, la plupart des concepts étudiés dans la chapitre 3 suivent le travail de Grassman, présenté dans son livre en 1844 "*Die Lineare Ausdehnunglehre, ein neuer Zweig der Mathematik*" (La théorie de l'extension linéaire, une nouvelle branche des mathématiques). Le livre de Grassman étant mal rédigé, il a fallu du temps pour la diffusion de ses idées. Ce fait est essentiellement du à l'utilisation d'une terminologie allemande peu répandue. Par exemple, il écrivait "*Schatten*" (ombre) plutôt que "projection". Ses idées ont survécues, pas sa terminologie.

Des travaux analogues on été publiés par le mathématicien suisse Ludwig Schläfi (1814-1895), contemporain de Grasmann.

Aujourd'hui, le concept de dimension est central en mathématiques, aussi bien qu'en physique ou qu'en statistiques. Il peut aussi s'adapter à des strutures non linéaires comme les *variétés*, qui généralisent l'idée de courbes et de surfaces.

Après cette digression historique, revenons à des choses plus terre à terre : quelle est la dimension de $\mathbb{R}^n$? Bien entendu, n, puisque l'on sait que les vecteurs $\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, la base dite "canonique".

Un plan dans $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2. On a déjà dit qu'il fallait au moins 2 vecteurs pour engendrer un plan et que plus de deux vecteurs dans un plan formaient une famille liée. Si deux vecteurs dans un plan sont linéairement indépendants, alors ils forment une base du plan. De même, si deux vecteurs d'un plan engendrent ce plan, alors ils forment une base du plan.

On généralise ces idées comme suit.

Familles libres et familles génératrices d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Soit V sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension m.

a. On peut trouver au plus m vecteurs linéairement indépendants dans V,

b. On a besoin d'au moins m vecteurs pour engendrer V,

c. Si m vecteurs de V sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de V,

d. Si m vecteurs de V engendrent V, alors ils forment une base de V.

La partie a. permet de définir la dimension comme le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans V. D'après b., cela peut aussi être le nombre minimal de vecteurs nécessaires pour engendrer V.

La définition d'une base précise qu'une famille pour être une base doit être libre et génératrice. Cependant, si on travaille avec le bon nombre vecteurs, il suffit de vérifier l'une ou l'autre des deux propriétés, le reste suit automatiquement.

Démonstration.

a. Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ une famille libre dans V et $(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m)$ une base de V. Puisque $V = vect(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m)$, on a $p \leq m$ d'après la Propriété 3.3.1.

b. Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ une famille génératrice de V, en lui supprimant ses vecteurs redondants on trouve une base de V qui a m éléments, donc $p \geq m$ d'après le Théorème de la Dimension page 3.

c. Soit $m = \dim(V)$, $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$ une famille libre dans V. Nous devons prouver que $V = vect(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$. Soit $\vec{v}$ un vecteur de V. D'après a., les $m+1$ vecteurs $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m, \vec{v}$ sont linéairement dépendants. Comme les vecteurs $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ sont linéairement indépendants, il n'y a pas de vecteurs redondants dans cette liste, et donc seul $\vec{v}$ est redondant dans la famille $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m, \vec{v})$. Donc $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$. Ceci étant vrai pour chaque $\vec{v} \in V$, on en déduit que

$$V = vect(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m),$$

et donc $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$ est bien une base de V.

d. Soient $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$ une famille génératrice de V. Si elle contenait un vecteur redondant, on trouverait une base de V qui avec au plus $m-1$ éléments, ce qui est impossible d'après le Théorème de la Dimension page 3. Donc $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$ est une base. ■

Dans ce qui suit on étudie comment trouver des bases des images et noyaux d'applications linéaires, et donc leur dimension.

Exemple 1

Trouver une base respectivement du noyau et de l'image de l'application linéaire représentée par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution. On sait que l'image de A est engendrée par ses vecteurs colonnes. Pour trouver une base de l'image, nous devons trouver les vecteurs redondants parmis les vecteurs colonnes de la matrice A, notés $\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_5$. Dans cet exemple simple, on observe tout de suite que

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{v}_2 = 2\overrightarrow{v}_1, \\ &\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{0}, \\ &\overrightarrow{v}_5 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_4. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que l'équation $x\overrightarrow{v}_1 + y\overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{0}$ n'admet que $x = y = 0$ comme solution, ce qui fait que la famille $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_4)$ est une famille libre. Par conséquent la famille $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_4)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Pour trouver une base du noyau de A, on utilise la méthode de l'exemple 8 de la section 3.2 aux vecteurs redondants $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_5$, ce qui va nous permettre de construire 3 vecteurs dans le noyau de A. On organise notre travail suivant une table.

Vecteurs redondants	**relations**	**Vecteurs dans le noyau**
$\overrightarrow{v}_2 = 2\overrightarrow{v}_1$	$-2\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\overrightarrow{v}_5 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_4$	$-\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_4 + \overrightarrow{v}_5 = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{w}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

On affirme que les trois vecteurs que nous avons construit forment une base du noyau de A. Le méthode des zéros développée dans la section précédente permet d'affirmer que ces vecteurs sont indépendants puisque la $i^{\text{ème}}$ composante $\overrightarrow{w}_i$ est égale à 1 tandis-que les autres correspondantes sont nulles.

Nous devons montrer que les trois vecteurs $\overrightarrow{w}_2$, $\overrightarrow{w}_3$ et $\overrightarrow{w}_5$ engendrent bien Ker(A). Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur quelconque du noyau. Il faut prouver qu'il est bien combinaison linéaire de $\overrightarrow{w}_2$, $\overrightarrow{w}_3$ et $\overrightarrow{w}_5$. Il est commode de considérer le vecteur auxiliaire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y} &= \overrightarrow{x} - x_2\overrightarrow{w}_2 - x_3\overrightarrow{w}_3 - x_5\overrightarrow{w}_5 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x_5 \\ 0 \\ 0 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \\ y_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_5, \\ y_4 &= x_4 + x_5. \end{aligned}$$

Puisque $\overrightarrow{y}$ est une combinaison linéaire de vecteurs dans Ker(A), il est lui-même dans Ker(A). Comme $\overrightarrow{x} \in$ Ker(A), on a

$$x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + x_3\overrightarrow{v}_3 + x_4\overrightarrow{v}_4 + x_5\overrightarrow{v}_5 = \overrightarrow{0},$$

en rappellant que les $\overrightarrow{v}_i$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A. En utilisant les relations entre les $\overrightarrow{v}_i$, on déduit de l'égalité plus haut

$$(x_1 + 2x_2 + x_5)\overrightarrow{v}_1 + (x_4 + x_5)\overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{0},$$

autrement dit

$$y_1\overrightarrow{v}_1 + y_4\overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{0}.$$

Comme la famille $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_4)$ est une famille libre, on en déduit que $y_1 = y_4 = 0$. Par conséquent, $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ et on a

$$\overrightarrow{x} = x_2\overrightarrow{w}_2 + x_3\overrightarrow{w}_3 + x_5\overrightarrow{w}_5,$$

ce qui implique bien que Ker(A) $= vect(\overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_3, \overrightarrow{w}_5)$ comme annoncé.

Si on applique la procédure développée dans l'exemple 1 à une matrice A quelconque de taille $n \times m$, on observe qu'une base du noyau de A contient autant de vecteur redondants que dans la famille des vecteurs colonnes, c'est-à-dire

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \\ \text{(nombre des vecteurs redondants dans les vecteur colonnes).}$$

Comme on a également vu que les vecteurs non redondants dans cette liste forme une base de l'image de A,

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(A)) &= \text{nb de vecteurs colonnes non redondants} \\ &= \text{nb de colonnes} - \text{(nb des vecteurs colonnes redondants)} \\ &= m - \dim(\mathrm{Ker}(A)).\end{aligned}$$

D'où la relation fondamentale satisfaite par toute matrice A de taille $n \times m$,

Formule fondamentale de l'alglinéaire

$$m = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$$

En principe on doit pouvoir déterminer des bases de l'image et du noyau en utilisant la méthode de l'exemple 1. Si jamais on ne voit pas rapidement les vecteurs redondants, on peut toujours utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan comme l'illustre l'exemple 2.

Exemple 2

Déterminer les bases des noyaux et image de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 5 & -8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & -7 \end{bmatrix},$$

en sachant que

$$\text{Frel}(A) = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution. Les vecteurs colonnes de A sont notés $\overrightarrow{a}_1, \cdots, \overrightarrow{a}_5$, tandis-que ceux de B sont notés $\overrightarrow{b}_1, \cdots, \overrightarrow{b}_5$.

On commence par remarquer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$. En effet, on sait que résoudre le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ est équivalent à résoudre le système $B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Il suffit alors de procéder comme dans le cas de l'exemple 1 pour trouver les vecteurs redondants parmis les vecteurs colonnes de B. Dans le cas d'une "Frel" c'est assez facile. Chaque colonne qui ne contient pas de pivot peut être exprimée comme combinaison linéaire de celles qui précèdent et qui contiennent des pivots.

Comme dans l'exemple 1, on organise le travail avec un tableau.

Vecteurs redondants	**relations**	**Vecteurs dans le noyau**
$\overrightarrow{b}_2 = 2\overrightarrow{b}_1$	$-2\overrightarrow{b}_1 + \overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\overrightarrow{b}_4 = 3\overrightarrow{b}_1 - 4\overrightarrow{b}_3$	$-3\overrightarrow{b}_1 + 4\overrightarrow{b}_3 + \overrightarrow{b}_4 = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{w}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\overrightarrow{b}_5 = -4\overrightarrow{b}_1 + 5\overrightarrow{b}_3$	$4\overrightarrow{b}_1 - 5\overrightarrow{b}_3 + \overrightarrow{b}_5 = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{w}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{w}_2$, $\overrightarrow{w}_4$ et $\overrightarrow{w}_5$ forment une base de $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$.

Pour construire une base de $\text{Im}(A)$, il nous faut déterminer les vecteurs redondants parmis les vecteurs colonnes de A. Mais les vecteurs redondants de A correspondent à ceux de B dans le sens où si $\overrightarrow{a}_i$ est redondant alors $\overrightarrow{b}_i$ l'est aussi.

Vérifions ce point sur la dernière colonne, puisque nous savons que $\overrightarrow{b}_5$ est redondant, avec $\overrightarrow{b}_5 = -4\overrightarrow{b}_1 + 5\overrightarrow{b}_3$. Cela nous a fourni le vecteur

$$w_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(A) = \text{Ker}(B),$$

d'où la relation $4\overrightarrow{a}_5 - 5\overrightarrow{a}_3 + \overrightarrow{a}_5 = \overrightarrow{0}$, *i.e.* $\overrightarrow{a}_5 = -4\overrightarrow{a}_1 + 5\overrightarrow{a}_3$, ce qui veut dire que $\overrightarrow{a}_5$ est redondant.

Comme on sait que $\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_4$ et $\overrightarrow{b}_5$ sont redondants, il en résulte qu'une base de $\mathrm{Im}(A)$ est

$$\overrightarrow{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

En suivant l'exemple 2 on peut établir la règle générale suivante.

Construction d'une base de l'image

Pour construire une base de l'image d'une matrice A, il suffit de prendre les vecteurs colonnes qui correspondent aux colonnes qui ont un pivot dans $\mathrm{Frel}(A)$.

Remarque 0.1 *IL faut bien faire attention à prendre les vecteurs colonnes de A et pas ceux de $Frel(A)$, car les matrices A et $Frel(A)$ n'ont pas nécessairement les mêmes images. Par exemple si on prend*

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, Frel(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par contre A et $Frel(A)$ ont le même noyau.

On note que pour trouver une base de l'image d'une matrice A, on prends en compte autant de colonnes de A qu'il y a de pivots dans la Frel correspondante, d'où un autre résultat essentiel :

Dimension de l'image
Soit A une matrice. Alors

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Rang}(A).$$

On dit parfois que la dimension du noyau d'une matrice est la *nullité* de la matrice. Par conséquent la formule fondamentale de l'algèbre linéaire

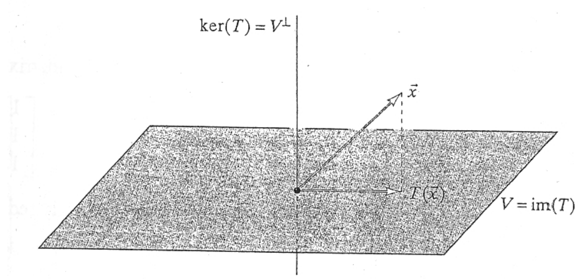
$$\dim(\mathrm{Im})(A) + \dim(\mathrm{Ker})(A) = m$$

peut aussi sécrire

$$\text{Nullité de } A + \text{Rang de } A = m,$$

pour n'importe quelle matrice de taille $n \times m$.

Figure 2: 2



$\boxed{\text{Exemple 3}}$

Soit T la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur un plan V.

Ici $m = 3$, et une dimension s'écrase puisque le noyau de T est la droite $V^{\perp}$ et on a pour image le plan 2D qui est V.

Bases de $\mathbb{R}^n$.

On sait qu'il faut n vecteurs indépendants pour constituer une base de $\mathbb{R}^n$, et on connait déjà la base canonique $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n$. La question est comment peut-on décider que n vecteurs $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$?

On sait depuis la section 3.2 que la famille $(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n)$ est une base si et seulement si chaque vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ sécrit de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_i$:

$$\overrightarrow{b} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_n \overrightarrow{v}_n = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

On sait que le système

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \overrightarrow{b}$$

admet une unique solution si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_n \end{bmatrix}$$

est inversible.

Bases de $\mathbb{R}^n$

La famillle $(\overrightarrow{v}_1, \ldots.., \overrightarrow{v}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_n \end{bmatrix}$$

est inversible.

Exemple 4

Pour quelle valeurs de k la famille suivante de vecteurs est-elle une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$$

Solution

On considère la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{bmatrix},$$

qui admet se réduit

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (1-k)/2 \\ 0 & 0 & k^2-1 \end{bmatrix}.$$

On peut achever l'algorithme de Gauss pour réduire cette matrice en I_3 si et seulement si $k^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $k \neq 1$ et $k \neq -1$. Conclusion, ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si k est différent de 1 et de -1.

On fait la synthèse de tout ce qui précède dans ce qui suit, sous forme matricielle.

Différentes caractéristiques des matrices inversibles

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($i.e$ une matrice carrée de taille $n \times n$). Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est inversible,

ii) $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une et une seule solution,

iii) $\mathrm{Frel}(A) = I_n$,

iv) $\mathrm{Rang}(A) = n$,

v) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$,

vi) $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$,

vii) Les vecteurs colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$,

viii) Les vecteurs colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$,

ix) Les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants.