3.2. SOUS-ESPACES DE $\mathbb{R}^n$, BASES ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE

On a vu dans la section 3.1 que l'image et le noyau d'une application linéaire avaient en commun :

ils contiennent le vecteur nul (du domaine pour le noyau, du co-domaine pour l'image),

ils sont stables pour l'addition

ils sont stables pour la multiplication "externe" par un scalaire.

D'une manière générale, tout sous-ensemble W de $\mathbb{R}^n$ ayant ces propriétés est

un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Les deux dernières propriétés montrent que W est stable par combinaison linéaire. C'est-à-dire que pour chaques $w_1 \in W$, $w_2 \in W$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$.

Les résultats de la section 3.1 montrent les résultats suivants.

Image et noyau sont des sous-espaces vectoriels

Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Alors

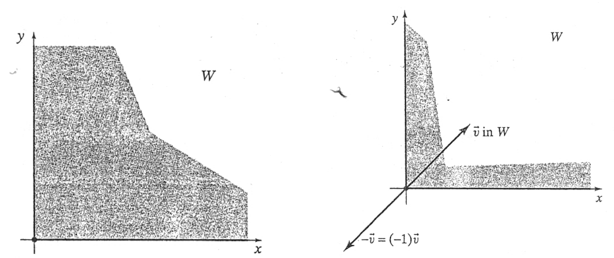
$\mathrm{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$,
$\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Le terme "*espace*" peut être surprenant dans ce contexte. Nous avons vu dans les exemples que noyaux et images pouvaient être des droites ou des plans, que l'on n'appelle pas d'habitude des "espaces". Dans les mathématiques actuelles, le terme "espace" est utilisé dans un contexte général et abstrait. Ce terme est souvent utilisé pour décrire des structures qui ne sont pas toujours en rapport avec notre "espace physique" qui est $\mathbb{R}^3$. Par exemple, le terme "espace vectoriel" sera utilisé ici pour décrire $\mathbb{R}^n$ pour toute valeur de n, et pas seulement $n = 3$.

Exemple 1

Soit $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$. Est-ce que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Figure 1: Ensemble W : il n'est pas stable par la multiplication par (-1).



Solution. L'ensemble W est constitué de tous les vecteurs dans le premier cadran du plan $x - y$. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car non stable par la multiplication par un scalaire négatif.

Exemple 2

Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :

- $\mathbb{R}^2$ lui-même,
- $\{0\}$,
- toutes les droites passant par l'origine.

Solution.

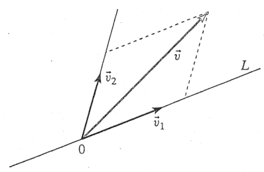
On commence par remarquer que $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (ce qui est facile à vérifier) et que $\mathbb{R}^2$ est bien un sous-espace vectoriel de lui-même.

Soit D une droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine. Par définition, il existe un vecteur $u \neq 0$ tel que $D = \text{vect}(u)$. On vérifie facilement qu'il sagit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Soit à présent W un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ qui ne soit ni une droite passant par l'origine, et qui ne soit pas réduit au vecteur nul, $W \neq \{0\}$. Donc il existe $v_1 \neq 0$ tel que $v_1 \in W$. Puisque W est stable par la multiplication externe par un scalaire, $D = \text{vect}(v_1) \subset W$. Comme W n'est pas une droite, W n'est pas réduit à D. Donc il existe $v_2 \neq 0$, tel que $v_2 \in W$, $v_2 \notin D$. Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. En utilisant un parallèlogramme, on peut écrire v comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. Comme W est stable par combinaisons linéaires, $v \in W$, donc $\mathbb{R}^2 \subset W$ et finalement $W = \mathbb{R}^2$.

De même, les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ sont

Figure 2: Expression de v comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.



- $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ lui même,
- Les droites passant par l'origine (sous-espace de dimension 1),
- Les plans passant par l'origine (sous-espace de dimension 2),

On notera que la hiérarchie des sous-espaces est liée à la *dimension* (concept qui sera explicite dans la section suivante).

	Sous-Espaces de $\mathbb{R}^2$	Sous-Espaces de $\mathbb{R}^2$
dimension 3		$\mathbb{R}^3$
dimension 2	$\mathbb{R}^2$	plans passant par 0
dimension 1	droites passant par 0	droites passant par 0
dimension 0	$\{0\}$	$\{0\}$

Exemple 5

On considère le plan $V \subset \mathbb{R}^3$ donné par l'équation $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

a) Trouver une matrice A telle que $V = \mathrm{Ker}(A)$.

b) Trouver une matrice B telle que $V = \mathrm{Im}(A)$.

Solution.

a) L'équation du plan peut sécrire $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$. Par conséquent $V = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

b) L'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes. Il suffit donc de décrire (si possible) V comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Ici, comme la matrice est déjà réduite échelonnée par ligne, et qu'il il y a deux variables libres s_2, x_3 on peut d'toutes les ecteurs solutions de l'équation $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ comme combinaison des deux vecteurs $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Par conséquent, $V = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ceci est conforme à l'intuition géométrique: pour un plan, deux vecteurs non parallèles conviennent

Les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ sont souvent définis par leurs équations,*i.e.* comme les solutions de systèmes linéaires homogènes (*i.e.* comme des noyaux d'applications linéaires), soit encore comme engendré par une famille de vecteurs (*i.e.* des images d'applications linéaires).

Parfois un sous-espace défini comme un noyau doit être défini comme une image et vice-versa.

La transition de noyau à image est directe : en utilisant la décomposition de Gauss, on peut représenter les solutions du système linéaire homogène comme un sous-espace engendré par une famille de vecteurs, *i.e.* une image, comme suit.

- Si un espace vectorel V contenu dans $\mathbb{R}^m$ est noyau d'une matrice A à n lignes et m colonnes, on peut le décrire comme image d'une matrice B en calculant la forme réduite échelonnée par ligne de A, ceci donne une liste de variables libres (correspondant aux colonnes sans pivot) et en choisissant une variable libre égale à 1 et toutes les autres variables égales à 0 on obtient des vecteurs qui engendrent le noayau de A, ces vecteurs définissent une matrice B avec n lignes et $m - \mathrm{rang}(A)$ colonnes.

Une méthode pour décrire l'image d'une matrice comme le noyau d'une autre est proposée dans les exrcices 3.1.42 et 3.1.43. Décrivons rapidement cette méthode:

- Si un espace vectorel V contenu dans $\mathbb{R}^n$ est image d'une matrice B à n lignes et m colonnes, on peut le décrire comme noyau d'une matrice A en calculant la forme réduite échelonnée par ligne de $B \vdots \mathrm{Id}_n$, qu'on note C. Les équations de V sont données par les lignes de C correspondant aux lignes nulles dans $\mathrm{frel}(A)$, donc comme le noyau d'une matrice avec $n - \mathrm{rang}(A)$ lignes et n colonnes.

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Trouver des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui engendrent l'image de A. Quel est le plus petit nombre de vecteurs nécessaires pour décrire $\mathrm{Im}(A)$?

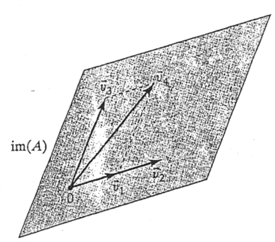
Solution.

On sait que $\mathrm{Im}(A)$ est engendré par les vecteurs colonnes de A,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

La figure ci-dessous illustre que l'image de A (dans ce cas particulier) est un plan : En effet, on note que

Figure 3: Image de A.



$$v_2 = 2v_1 \in \mathrm{vect}(v_1, v_3), \quad v_4 = v_1 + v_3 \in \mathrm{vect}(v_1, v_3).$$

Par conséquent les vecteurs v_2 et v_4 sont redondants et on a

$$\mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{vect}(v_1, v_3).$$

On observe enfin que les vecteurs v_1 et v_3 ne sont pas parallèles, de sorte que l'image de A est engendrée par deux vecteurs et pas par un unique vecteur. Vérifions par des calculs algébriques que $\mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{vect}(v_1, v_3)$.

On a naturellement $\text{vect}(v_1, v_3) \subset \text{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. On va vérifier l'inclusion inverse. Soit $v \in \text{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ quelconque. Alors v est combinaison linéaire des vecteurs v_i, et on a

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 (2v_1) + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 (v_1 + v_4) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4) v_1 + (\lambda_3 + \lambda_4) v_3 \in \text{vect}(v_1, v_3), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

L'exemple suivant motive les définitions essentielles qui suivent.

Vecteurs redondants, indépendance linéaires, bases

Soit une famille de vecteur $v_1, v_2, \cdots, v_m$ dans $\mathbb{R}^n$.

a. On dit qu'un vecteur v_j est redondant si il est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans la liste, $v_1, v_2, \cdots, v_{j-1}$
b.On dit que les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sont *linéairement indépendants* si aucun des vecteurs qui consitue la liste est redondant. Sinon, on dit que les vecteurs sont linéairement dépendants.
c. On dit que la famille de vecteurs $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ est une base d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, si chaque vecteur v_j est dans V, si $V = \text{vect}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ et si les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sont linéairement indépendants.

Remarque 0.1 *Lorsque que les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sont linéairement indépendants, on dit aussi que la famille de vecteurs $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ est linéairement indépendante. On dira de cette famille qu'elle est "une famille libre".*

Lorsque que les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ ne sont pas linéairement indépendants, on dira aussi qu'ils sont liés.

On revient sur l'exemple 4. Dans la liste

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

qui constitue la liste des vecteurs colonnes de A, les vecteurs v_2 et v_4 sont redondants, puisque $v_2 = 2v_1$ et $v_4 = v_1 + v_3$. En retirant les vecteurs redondants, on observe que les vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

sont linéairement indépendants (on vérifie aussi facilement que le système $xv_1 + yv_3 = 0$ n'admet que $x = 0$ et $y = 0$ comme unique solution). Donc la famille (v_1, v_3) constitue une base de $V = \mathrm{Im}(A)$.

Base de l'image d'une application linéaire

Soit A une matrice (ou de manière équivalente on peut raisonner sur l'application linéaire qu'elle représente). On obtient une base de l'image de A, $\mathrm{Im}(A)$, en retirant de la famillle des vecteurs collones de A tous les vecteurs redondants.

Il se pose alors la question de savoir comment faire d'un point de vue pratique pour trouver les vecteurs redondants. Dans les cas faciles comme celui de l'exemple 4, on peut le faire à l'aide d'observations élémentaires. On dévellope dans la suite un algorithme systématique pour répondre à cette question. cet algorithme est basé sur la décomposition de Gauss-Jordan.

Exemple 5

Est-ce que la famille de vecteurs ci-dessous dans $\mathbb{R}^7$ est une famille libre, autrement dit est-ce que les vecteurs ci-dessous sont linéairement indépendants ?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Solution

On cherche si il y a des vecteurs redondants dans la liste de vecteurs. Le vecteur v_1 n'est pas redondant car il est différent de 0. Le vecteur v_2 n'est pas un multiple (scalaire) de v_1, ce que l'on voit en notant que la $4^{\text{ème}}$ composante de v_1 est nulle, ce qui n'est pas le cas de la $4^{\text{ème}}$ composante de v_2. Donc v_2 n'est pas redondant. Le vecteur v_3 ne l'est pas, car les deux dernières composantes de v_1 et v_2 sont nulles, ce qui n'est pas le cas de celle de v_3. Enfin, on voit que la deuxième composante des vecteurs v_1 , v_2 et v_3 est nulle, ce qui n'est pas le cas de le deuxième composante de v_4, lequel ne peut pas être combinaison linéaire de v_1 , v_2 et v_3. Donc v_4 n'est pas redondant. Ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Indépendance linéaire et composantes nulles

Soit une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$. On suppose que v_1 n'est pas le vecteur nul, et que que chaque vecteur v_j admet une composante non nulle à un rang où les composantes correspondantes des vecteurs qui le précèdent, $v_1, \cdots, v_{j-1}$, sont toutes nulles. Alors les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sont linéairement indépendants.

On explicite autrement l'hypothèse faite dans l'énoncé qui précède. On note $v_{i,j}$ la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur v_j. On suppose que pour chaque j entre 1 et m, il existe un indice i_0 (qui peut dépendre de j) tel que pour chaque $k < j$ on ait $v_{i_0,k} = 0$. Donc dans ce cas la famille est libre.

A titre d'illustration, on reprend l'exemple 5. Les vecteurs sont les suivants

$$v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ \boxed{0} \\ 4 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ 9 \\ \boxed{0} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ \boxed{0} \\ 7 \\ \boxed{1} \\ 4 \\ 8 \\ \boxed{0} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ \boxed{0} \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ \boxed{7} \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ \boxed{5} \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

et on a encadré les coefficients correspondants.

Exemple 6

Est ce que les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Solution.

Dans cet exemple, on ne peut pas utiliser le critère avec des 0. On note que $v_1 \neq 0$, et on vérifie facilement que v_2 n'est pas un multiple (scalaire) de v_1. Donc ces vecteurs ne sont pas redondants. Pour savoir si v_3 est redondant, nous devons étudier le système linéaire

$$v_3 = xv_1 + yv_2,$$

lequel sécrit aussi

$$M = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right], \quad \text{frel}(M) = \left[\begin{array}{cc:r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

qui montre que ce système admet une et une seule solution $x = -1$ et $y = 2$, de sorte que

$$v_3 = -v_1 + 2v_2.$$

Il en résulte que v_3 est redondant et que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement dépendant. On dit aussi que la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille liée.

Pour de nombreuses raisons, les mathématiciens aiment écrirent leurs équations sous la forme

$$(\text{quelque chose}) = 0.$$

Dans le cas précédent, l'équation s'écrit

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = 0.$$

On appelle cette équation une *relation linéaire* portant sur les vecteurs v_1, v_2 et v_3.

Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ une famille de vecteurs. Une équation de la forme

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$$

est appelée *une relation linéaire* entre les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$. Si les seuls coefficients λ_i satisfaisant cette relation sont tous égaux à zéro, on dit que cette relation est triviale. On dit que la relation est non triviale si il y a au moins un coefficient λ_i non nul.

Relations et dépendance linéaire

Les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sont linéairement dépendants si et seulement si il existe entre eux une relation linéaire non triviale.

Démonstration

On suppose que les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sont linéairement dépendants. Donc il existe un indice j tel que le vecteur v_j soit redondant. Il existe donc des scalaires λ_i tels que $v_j = \lambda_{j-1}v_{j-1} + \cdots + \lambda_1 v_1$ que l'on peut écrire encore $(-1)v_j + \lambda_{j-1}v_{j-1} + \cdots + \lambda_1 v_1 = 0$, ce qui est une relation non triviale puisque $-1 \neq 0$.

Réciproquement, supposons qu'il y ait entre les vecteurs v_j une relation non triviale $\lambda_m v_m + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \cdots + \lambda_1 v_1 = 0$. Soit j_0 le plus *grand indice* j tel que $\lambda_j \neq 0$. On peut écrire

$$v_{j_0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{j_0}} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{j_0}} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_{j_0-1}}{\lambda_{j_0}} v_{j_0-1}.$$

Donc le vecteur v_{j_0} est redondant, ce qui achève la preuve. ■

Exemple 7

Soit une matrice de taille $n \times m$. On suppose que les vecteurs colonne de A sont linéairement indépendants. Déterminer le noyau de A.

Solution.

Il faut résoudre l'équation $Ax = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ ou encore } \quad x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0.$$

On constate que trouver le noyau de A, revient à étudier une relation linéaire entre les vecteurs colonnes de la matrice. Les vecteurs colonnes de A étant supposés indépendants, le système plus haut admet une unique solution qui est la solution triviale, ce qui fait que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Noyau et relations linéaires

Soit une matrice de taille $n \times m$. Les vecteurs contenus dans le noyau de A correspondent à une relation linéaire entre les vecteurs colonnes de A, $v_1, v_2, \cdots, v_m$. L'équation

$$Ax = 0 \quad \text{est équivalente à} \quad x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0.$$

En particulier, les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, ou bien encore de manière équivalente $\mathrm{rang}(A) = m$. Cette condition implique en particulier que $m \leq n$.

On constaste en corollaire, que l'on ne peut pas trouver plus de n vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 8

Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$\text{vecteur redondant} \quad \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},$$

$$\text{relation linéaire} \quad 1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \in \ker(A) \quad \text{car} \quad \begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Caractérisation de l'indépendance linéaire - Résumé.

Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Les énoncés suivants sont équivalents.

i.Les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sont linéairement indépendants, (on dit aussi que la famille $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ est une famille libre.)

ii. Aucun des vecteurs de la famille est redondant, à savoir qu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans l'énumération de la liste.

iii.Aucun des vecteurs v_j n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs $v_1, \cdot, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_m$.

iv. Ker $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \{0\}$.

v. Le système $x_1v_1 + \cdots + x_mv_m = 0$ n'admet que le vecteur nul pour solution, à savoir $x_1 = 0, \cdots, x_m = 0$.

vi. Rang $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = m$.

Une famille libre ne peut jamais contenir le vecteur nul !

On termine cette section par une caractérisation utile des bases.

Exemple 9

Soit $B = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ une base d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ et soit $v \in V$. Combien de solutions $c_1, \cdots, c_m$ l'équation

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m \tag{1}$$

admet-elle ?

Solution. Puisque $V = \text{vect}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ et que $v \in V$, par définition, l'équation (1) admet au moins une solution $c_1, \cdots, c_m$. Soit $d_1, \cdots, d_m$ une autre solution éventuelle de l'équation (1) permettant de décomposer v suivant la base B, à savoir

$$v = d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m \tag{2}$$

En soustrayant (2) à (1), on obtient

$$(c_1 - d_1)v_1 + \cdots + (c_m - d_m)v_m = \{0\}. \tag{3}$$

Puisque la famille B est une famille libre, on déduit de l'équation (3) que $c_1 - d_1 = 0, \cdots, c_m - d_m = 0$. Par conséquent les représentations données par (1) et (2) sont identiques. On a le résultat suivant.

Bases et unicité des représentations

Soit $B = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ une famille de vecteurs contenus dans un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$.
La famille B est une base de V si et seulement si chaque vecteur v peut être décomposé de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de B, à savoir il existe un unique *"m-uplet"* $(c_1, \cdots, c_m)$ de nombres réels tel que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m.$$

Dans la suite on dira que les c_i sont les coordonnées du vecteur v dans la base B.

Démonstration.

On a déjà prouvé un sens dans cette afirmation. Il reste à prouver la réciproque, à savoir que l'unicité de la décomposition de chaque vecteur de V comme combinaison linéaire des vecteurs de B entraine que B est bien une base.

L'hypothèse entraine d'ores et déjà que $V = \text{vect}(B)$. Il reste à montrer que B est une famille libre pour prouver que c'est bien une base de V. Pour cela, considérons l'équation

$$c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m = 0. \tag{4}$$

Comme $0 \in V$, il se décompose de manière unique suivant B, $0 = 0v_1 + \cdots + 0v_m$. Or $c_1 = 0, \cdots, c_m = 0$ est solution de (4), et l'unicité de la décomposition de 0 suivant B assure que la solution nulle est la seule de (4) et donc que B est libre, et donc une base de B puisque déjà génératrice de B.