Chapitre 3

Sous-Espaces de $\mathbb{R}^n$ et leur dimension

1 3.1. IMAGE ET NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Image d'une application

L'image d'une application est l'ensemble des valeurs prises par la fonction dans l'ensemble d'arrivée (co-domaine). Soit f l'application

$$f : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ x \longrightarrow f(x), \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \text{image}(f) = \text{Im}(f) \quad &= \{f(x);\, x \in X\}, \\ &= \{b \in Y;\, \exists\, x \in X;\, b = f(x)\}. \end{aligned}$$

Exemple 1

Un groupe de journalistes X et un groupe de chefs détat Y sont face à face dans une conférence de presse. Chaque journaliste jette une chaussure à la tête d'un chef d'état, et fait mouche à chaque fois. On considère l'application $y = f(x)$ qui va de X dans Y et qui associe à chaque journaliste la cible y de sa chaussure. L'image de f est l'ensemble des chefs d'état ayant été touché par une chaussure.

Exemple 2

L'image de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels strictement positifs, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^\star$. En effet, $f(x) = e^x$ est positif quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $b > 0$. Alors, on a

$$b = e^{\ln b} = f(\ln b).$$

Plus généralement, l'image de la fonction $y = f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des $b \in \mathbb{R}$, tels que la droite $y = b$ a une intersection non vide avec le graphe de f.

Figure 1: Image d'une fonction

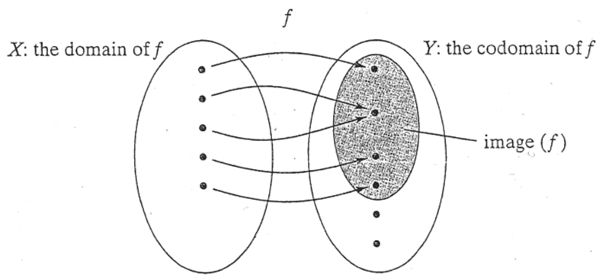
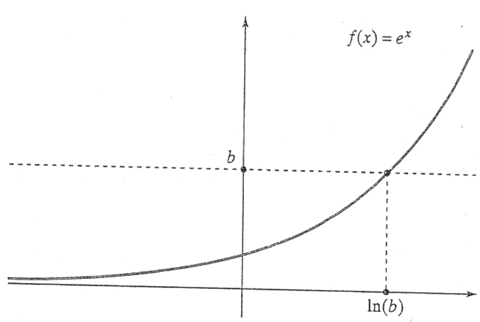


Figure 2: Image de la fonction exponentielle



L'image de f est la projection othogonale du graphe de f sur l'axe vertical.

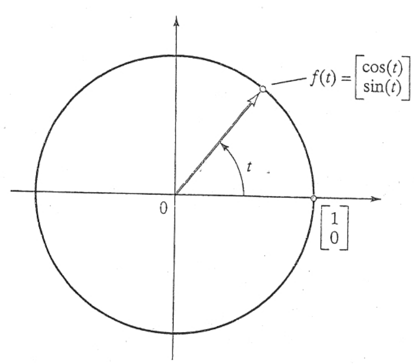
Exemple 3

Soit

$$f : \begin{cases} I\!R \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longrightarrow \begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix}. \end{cases}$$

L'image de f est le cercle unité centré à l'origine, cercle que l'on note S_1. En effet, pour $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$, et donc $f(t) \in \mathrm{S}_1$. Réciproquement, chaque vecteur u de norme 1 peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix} = f(t)$, où t est l'angle polaire.

Figure 3: Cercle unité S_1



La fonction f de l'exemple 3, est une *paramétrisation* du cercle unité. Plus généralement, la paramétrisation d'une courbe C dans $\mathbb{R}^2$, est une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui a pour image la courbe C.

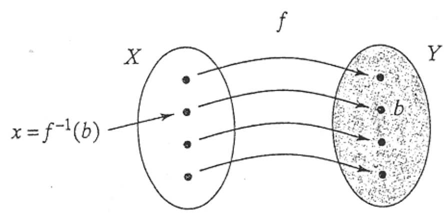
Exemple 4

Soit

$$f : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ x \longrightarrow f(x), \end{cases}$$

une application inversible. Alors $\mathrm{Im}(f) = Y$. En effet, on note que par définition, $\mathrm{Im}(f) \subset Y$. Soit $b \in Y$ quelconque. Comme f est inversible, il existe un unique $x \in X$ tel que $b = f(x)$, c'est-à-dire $b \in \mathrm{Im}(f)$. Cela étant

Figure 4: Exemple avec des ensembles de cardinal fini

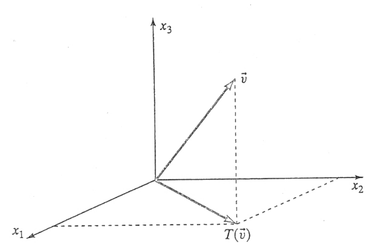


vérifié $\forall\, b \in Y$, il en résulte que $Y \subset \mathrm{Im}(f)$, ce qui finalement conduit à $\mathrm{Im}(f) = Y$, comme annoncé.

$\boxed{\text{Exemple 5}}$

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le plan x_1, x_2, c'est-à-dire $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(T)$ est le plan x_1, x_2, constitué par les vecteurs de la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Figure 5: Projection orthogonale sur le plan x_1, x_2



$\boxed{\text{Exemple 6}}$

Déterminer $\mathrm{Im}(T)$, où $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Solution

L'image de T est l'ensemble des vecteurs "atteints" par T, c'est-à-dire tous les vecteurs de la forme

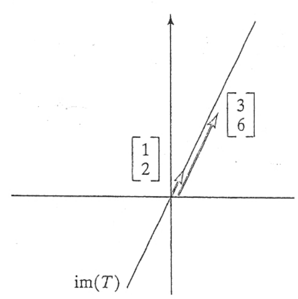
$$T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$
$$= x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 3x_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = (x_1+3x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

L'image de T est la droite D ayant pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. En effet, ce qui précède assure que $\mathrm{Im}(T) \subset D$. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$. IL existe une infinité de x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$, tels que $x_1 + 3x_2 = \lambda$.

Alors on a pour chaque x_1 et x_2 ainsi choisis, $T\begin{bmatrix}x_1\\x_1\end{bmatrix} = \lambda\overrightarrow{u}$. Donc $D \subset \mathrm{Im}(T)$ et finalement $D = \mathrm{Im}(T)$.

On notera que les deux vecteurs colonnes de la matrice A qui représente T, $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ sont parallèles, ou bien encore "*colinéaires*"

Figure 6: Image de T



Exemple 7

Déterminer $\mathrm{Im}(T)$, où $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, avec $A = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}$.

Solution

L'image de T est l'ensemble des vecteurs "atteints" par T, c'est-à-dire tous les vecteurs de la forme

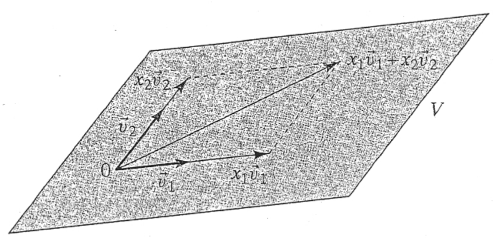
$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

L'image de T est le plan "*engendré*" par les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$, aussi décrit comme le plan qui passe par l'origine et les deux extrémités des vecteurs v_1 et v_2.

Figure 7: Image de T



IL faut noter que dans le cas de cet exemple, les deux vecteurs colonne de la matrice A ne sont pas *colinéaires* mais sont "*indépendants*".

Espace engendré par une famille de vecteurs

Soit $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est *l'espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs*. On la note vect,

$$\begin{aligned} &\text{vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m) = \\ &\{\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_m \overrightarrow{v}_m, \quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

La notion "d'espace vectoriel" sera détaillée plus en détail dans la section 3.2.

Image d'une application linéaire

L'image d'une application linéaire $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A. On note cet espace $\mathrm{Im}(T)$, et parfois aussi $R(T)$ (pour "range" en anglais).

Pour démontrer ce résultat, on écrit l'application sous forme vectorielle comme dans les exemples précédents,

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} =$$
$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + x_m\overrightarrow{v}_m.$$

Par un raisonnement analogue à ceux effectués dans les exemples précédents, ce calcul montre que

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m).$$

Soit

$$T : \left\{ \begin{array}{l} I\!R^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{x} \longrightarrow T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}, \end{array} \right.$$

une application linéaire. Son image a les propriétés suivantes.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^n$ est toujours dans l'image de T, car on a toujours $\overrightarrow{0} = A\overrightarrow{0} = T(\overrightarrow{0})$.

Soient $\overrightarrow{v}_1 \in \mathrm{Im}(T)$ et $\overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$. Alors on a encore

$$\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T).$$

Pour vérifier cette affirmation, il suffit de dire que puisque $\overrightarrow{v}_1 \in \mathrm{Im}(T)$ alors il existe $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\overrightarrow{v}_1 = T(\overrightarrow{w}_1)$, et de même il existe $\overrightarrow{w}_2 \in \mathbb{R}^m$ tel que $\overrightarrow{v}_2 = T(\overrightarrow{w}_2)$. Alors $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = T(\overrightarrow{w}_1) + T(\overrightarrow{w}_2) = T(\overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2)$ ce qui montre que $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ est bien dans $\mathrm{Im}(T)$.

Soient $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a encore $\lambda\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$.

En effet, puisque $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$, il existe $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{w})$. Par conséquent, $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda T(\overrightarrow{w}) = T(\lambda\overrightarrow{w})$, ce qui montre que $\lambda\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$.

L'image d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a les propriétés suivantes :

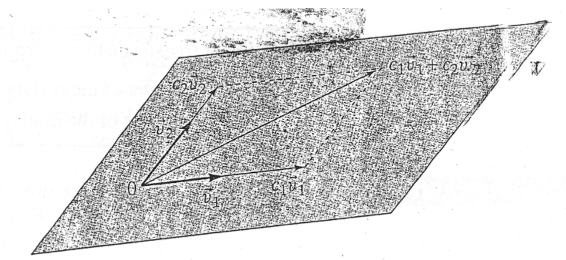
(a) $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Im}(T)$,

(b) $\forall \overrightarrow{v}_1 \in \mathrm{Im}(T)$, $\forall \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, alors $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, (stabilité de l'addition)

(c) $\forall \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$ (stabilité de la multiplication par un scalaire).

Il résulte des propriétés (b) et (c) que l'image d'une application linéaire T est stable par combinaisons linéaires : si des vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p$ sont dans l'image de T, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires, alors $\lambda \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v}_p$ est encore dans l'image de T.

Figure 8: cas $n = 3$, $p = 2$: si $\overrightarrow{v}_1 \in \mathrm{Im}(T)$, $\overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) \subset \mathrm{Im}(T)$



Exemple 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée de taille $n \times n$. On note A^2 le produit de A par elle-même, *i.e.* $A^2 = AA$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A),$$

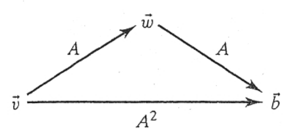
c'est-à-dire que chaque vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(A^2)$ est aussi dans $\mathrm{Im}(A)$.

Solution

Soit $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(A^2)$. Alors il existe $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{b} = A^2 \overrightarrow{v} = A(A\overrightarrow{v})$. Donc en posant $\overrightarrow{w} = A\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{b} = A\overrightarrow{w}$, ce qui assure que $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(A)$.

Le noyau d'une application linéaire

Figure 9: Illustration du "lemme des images"



Lorsque l'on étudie les fonctions réelles $y = f(x)$, on est souvent conduit à chercher les zéro de f (quand par exemple f est la dérivée d'une fonction). Par exemple la fonction $y = \sin(x)$ a une infinité de zéros qui sont les $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dans ce qui suit, on va étudier les zéros des applications linéaires.

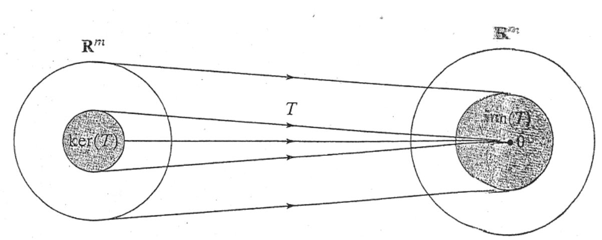
Noyau d'une application linéaire

Le noyau d'une application linéaire $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ solutions de l'équation $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Cet ensemble est le plus souvent noté Ker(T) ou encore Ker(A) (de l'anglais "Kernel"). Il est aussi noté parfois $N(T)$.

En d'autres termes le noyau de T est l'ensemble des solutions du système linéaire

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

Figure 10: Noyau/Image

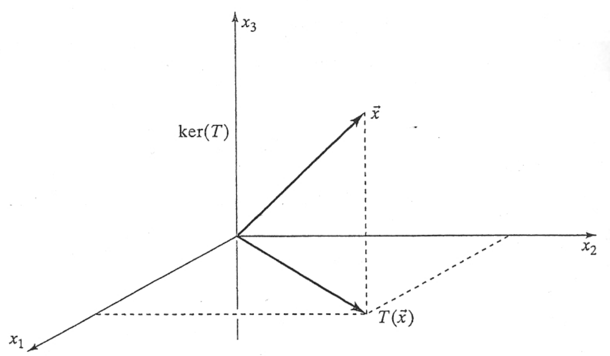


Étant donnée une application linéaire $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,
Im$(T) \subset \mathbb{R}^n$: l'image est un sous-ensemble du co-domaine $\mathbb{R}^n$,
Ker$(T) \subset \mathbb{R}^m$: le noyau est un sous-ensemble du domaine $\mathbb{R}^m$.

Exemple 9

Soit T la projection orthogonale sur le plan x_1, x_2 dans $\mathbb{R}^3$. Son noyau est l'ensemble des solutions de l'équation $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$. Cet ensemble est constitué de l'axe x_3, autrement dit vect$(\overrightarrow{e}_3)$.

Figure 11: Projection orthogonale sur le plan x_1, x_2



Exemple 10

Trouver le noyau de l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overrightarrow{x}.$$

Solution

On doit résoudre le système linéaire

$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient

$$\text{frel} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 30 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 20 \end{array} \right]$$

Par conséquent les solutions de ce système sont de la forme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = t\overrightarrow{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donc Ker(T) dans ce cas est la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Plus généralement, soit $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et où $m > n$, comme dans l'exemple 10. Dans ce cas, le système $A\overrightarrow{x} = 0$ a toujours des variables libres, et le système admet une infinité de solutions. Par conséquent, le noyau contient une infinité de vecteurs. Cela correspond à l'intuition qui nous dit qu'il y aura des "écrasements" si on cherche à plonger linéairement d'une manière ou d'une autre le "grand" espace $\mathbb{R}^m$ dans le "plus petit" espace $\mathbb{R}^n$.

Exemple 11

Trouver le noyau de l'application linéaire $T = \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, où A est la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 6 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

SolutionNous devons résoudre le système linéaire

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

On vérifie que

$$\text{frel}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte que le noyau de T est l'ensemble des solutions du système

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & - & 6x_3 & & + & 6x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array} \right|,$$

soit encore

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & = & 6x_3 & - & 6x_5 \\ x_2 & = & -2x_3 & + & 2x_5 \\ x_4 & = & & - & 2x_5 \end{array} \right|,$$

système qui admet comme solutions

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6s-6t \\ -2s+2t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v},$$

où $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ sont arbitraires.

En utilisant la notion "d'espace engendré par une famille de vecteurs" introduite plus haut, on peut écrire

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Le noyau a les mêmes propriétés qualitives que l'image :

Le noyau d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a les propriétés suivantes :

(a) $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Ker}\ (T)$,

(b) $\forall\, \overrightarrow{v}_1 \in \mathrm{Ker}(T)$, $\forall\, \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$, alors $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$, (stabilité de l'addition)

(c) $\forall\, \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ (stabilité de la multiplication par un scalaire).

N.B. Tout espace engendré par une famille de vecteurs vérifie les propriés (a), (b) et (c).

Exemple 12

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \times n$ inversible. Trouver $\mathrm{Ker}(A)$.

Solution.

Comme A est inversible, on sait que le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ admet une unique solution, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Donc $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Réciproquement, si A est non inversible, le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ admet une infinité de solutions, et donc $\mathrm{Ker}(A) \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Comme on a toujours $\{\overrightarrow{0}\} \subset \mathrm{Ker}(A)$, on déduit par contraposée que si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$, alors A est inversible.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. La matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exemple 13

Quelles sont les matrices $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$. On donnera la réponse en terme du rang de A.

Solution.

On considère le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Celui-ci n'admet que $\overrightarrow{0}$ comme unique solution nécessite qu'il n'admet pas de variable libre, et donc (voir section 1.3) que $\mathrm{Rang}(A) = m$.

En résumé :

Quand a-t-on Ker$(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ **?**

Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si $\mathrm{Rang}(A) = m$ (ce qui implique que $m \leq n$ puisque $m = \mathrm{Rang}(A) \leq n$).

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. La matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Différentes caractéristiques des matrices inversibles

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

A est inversible,
Le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une unique solution pour chaque $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$,
$\mathrm{frel}(A) = \mathrm{I}_n$,

$\mathrm{Rang}(A) = n$,

$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$,

$\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.