Chapitre 2

1 2.4. Produits matriciels

1.1 Produit de matrices carrées

On a l'habitude de faire des **produits de nombre**;

Par exemple

$$2 \times 3 = 6$$

et on est habitué aux propriéts suivantes

- il n'y a pas de diviseur de O: si un produit de deux nombres est nul c'est que l'un de ces deux nombres est nul
- le produit de deux nombres est commutatif:

  $$2 \times 3 = 3 \times 2$$

  et plus generalement pour tous nombres b et a

  $$a \times b = b \times a$$

On va généraliser le produit de nombre au **produit des tableaux de nombres**, c'est à-dire au produit de **matrices**.

Si

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

sont deux matrices carrées de taille 2 (avec deux lignes et deux colonnes) on définit

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_1 \times a_1 + b_2 \times a_3 & b_1 \times a_2 + b_2 \times a_4 \\ b_3 \times a_1 + b_4 \times a_3 & b_3 \times a_2 + b_4 \times a_4 \end{bmatrix}.$$

$B \times A$ est aussi une matrice de taille 2.

Par exemple, si

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},$$

alors

$$B \times A = \begin{bmatrix} 6 \times 1 + 7 \times 3 & 6 \times 2 + 7 \times 5 \\ 8 \times 1 + 9 \times 3 & 8 \times 2 + 9 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 47 \\ 35 & 61 \end{bmatrix}$$

Pour les débutants on dispose le calcul ainsi

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 2 \\ & & 3 & 5 \\ & & & \\ 6 & 7 & 27 & 47 \\ 8 & 9 & 35 & 61 \end{array}$$

Cette définition peut être étendue à n'importe quel matrice $n \times n$ où n est un entier naturel $(1, 2, \ldots, 819\ldots)$: à la position d'indice i, j de $B \times A$ on place le produit de la i-ème ligne de B par la j-ème colonne de A.

Le produit des matrices a des propriétés étranges par rapport au produit de nombres

- il y a des diviseurs de O: si un produit de deux matrices est nul (toutes les composantes sont nulles) il peut arriver qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

  Par exemple Si $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & 4 \\ & & 1 & 2 \\ & & & \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

  autrement dit

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + -2 \times 1 & 1 \times 4 + -2 \times 2 \\ -2 \times 2 + 4 \times 1 & -2 \times 4 + 4 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- le produit de deux matrices n'est pas toujours commutatif:

$$A \times B \neq B \times A$$

  . Par exemple si comme tout à l'heure $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & -2 \\ & & -2 & 4 \\ & & & \\ 2 & 4 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{array}$$

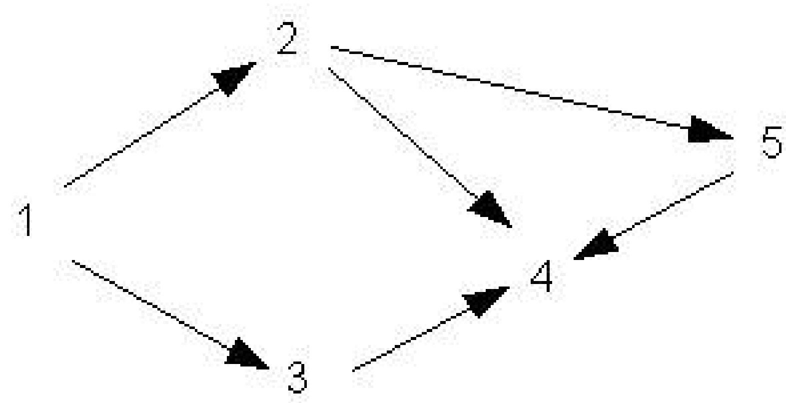
autrement dit

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 4 \times -2 & 2 \times -2 + 4 \times 4 \\ 1 \times 1 + 2 \times -2 & 1 \times -2 + 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \neq B \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Une première application du produit de matrices On se donne un graphe oreinté c'est à dire des points numérotés avec des flèches entre eux.

Par exemple

Figure 1: Graphe



et on construit la matrice d'adjacence du graphe

- on met un 1 à la place i, j s'il y a une flèche partant de i et allant à j
- on met un 0 à la place i, j s'il n'y a pas de flèche partant de i et allant à j

Dans notre exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut faire le produit $A^2 = A \times A$

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

autrement dit

$$
A^2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

La matrice A^2 compte le nombre de chemins de longueur 2 entre i et j !!

De même la matrice $A^3 = A \times A^2$ compte le nombre de chemins de longueur 3 entre i et j !!

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Autrement dit

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

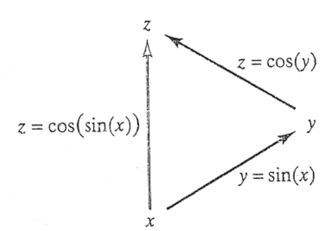
Il y a un seul chemin de longueur 3, entre 1et 4

1.2 Composition des applications

Mais c'est pour étudier la composition des applications linéaires que la multiplication des matrices va être la plus utile.

On commence par rappeler le concept de la composition de deux applications. La composition de $y = \sin(x) = f(x)$ avec la fonction $z = \cos(y) = g(y)$ est la fonction $z = \cos(\sin(x)) = (g \circ f)(x)$.

Figure 2: composition de fonctions



On peut composer de la même manière les applications linéaires. Retournons à l'exemple du début de la section 2.1. La position $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ du bateau est donnée par une position codée $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Le code est donné par l'application linéaire

$$y = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

On avait oublié un détail : la position du bateau est transmise à un central à Paris, et est codée à nouveau par l'application

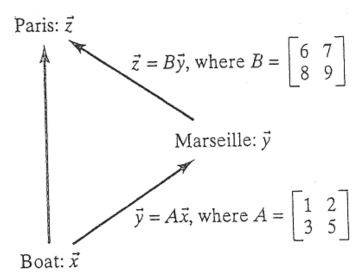
$$z = By, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

La position du bateau reçue à Paris est donnée par la formule

$$z = B(Ax),$$

comme étant la composition de $y = Ax$ avec $z = By$.

Figure 3: composition d'applications linéaires



Est-ce que l'application composée est linéaire, et si oui quelle est sa matrice ?

Nous allons aborder cette question cruciale : (a) en utilisant la force brutale, (b) en faisant un peu de théorie.

(a) On écrit les formules composantes par composante,

$$(1) \begin{cases} z_1 = 6y_1 + 7y_2, \\ z_2 = 8y_1 + 9y_2, \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2, \end{cases}$$

puis on substitue dans (1) les formules données pour les y_i dans (2), ce qui donne

$$\begin{aligned} z_1 &= 6(x_1 + 2x_2) + 7(3x_1 + 5x_2) &&= (6 \cdot 1 + 7 \cdot 3)x_1 + (6 \cdot 2 + 7 \cdot 5)x_2 \\ &= 27x_1 + 47x_2, \\ z_2 &= 8(x_1 + 2x_2) + 9(3x_1 + 5x_2) &&= (8 \cdot 1 + 9 \cdot 3)x_1 + (8 \cdot 2 + 9 \cdot 5)x_2 \\ &= 35x_1 + 61x_2, \end{aligned}$$

ce qui montre que la composée est bien linéaire et a pour matrice

$$BA = \begin{bmatrix} 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 6 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \\ 8 \cdot 1 + 9 \cdot 3 & 8 \cdot 2 + 9 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 47 \\ 35 & 61 \end{bmatrix}.$$

(b) On utilise la caractérisation des applications linéaires (section 2.1) pour prouver que l'application $T(x) = B(Ax)$ est linéaire. On a :

$$\begin{aligned} T(v+w) &= B(A(v+w)) & &= B(Av+Aw) \\ &= B(Av)+B(Aw) & &= T(v)+T(w) \\ T(kv) &= B(A(kv)) & &= B(kAv) \\ &= kB(Av) & &= kT(v). \end{aligned}$$

Maintegnt que l'on sait que T est linéaire, il nous suffit pour trouver sa matrice de calculer $T(e_1)$ et $T(e_2)$, de sorte que la matrice de T est la matrice $\begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} T(e_1) = B(Ae_1) &= B(\text{de la première colonne de A}) \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 35 \end{bmatrix}, \\ T(e_2) = B(Ae_2) &= B(\text{de la deuxième colonne de A}) \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 61 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui fait que la matrice de T est égale à

$$\begin{bmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 47 \\ 35 & 61 \end{bmatrix}.$$

Bien entendu, le résultat est le même que celui obtenu en (a) et on retrouve la matrice BA.

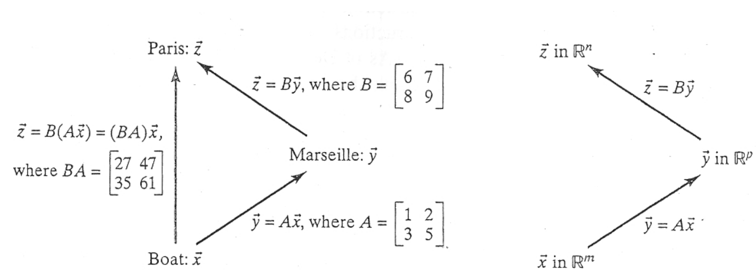
Le produit BA est donc la matrice de l'application $T(x) = B(Ax)$. Cela veut dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad T(x) = B(Ax) = (BA)x.$$

On considère maintenant le cas de matrices non nécessairement carrées. Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times m$.

De nouveau, l'application composée $z = B(Ax)$ est linéaire (la justification donnée en b) fonctionne de la même façon ici). La matrice de

Figure 4: Vers le cas général



l'application $z = B(Ax)$ est le *produit* de la matrice B par la matrice A, et est noté BA. Cette matrice est de taille $n \times m$.

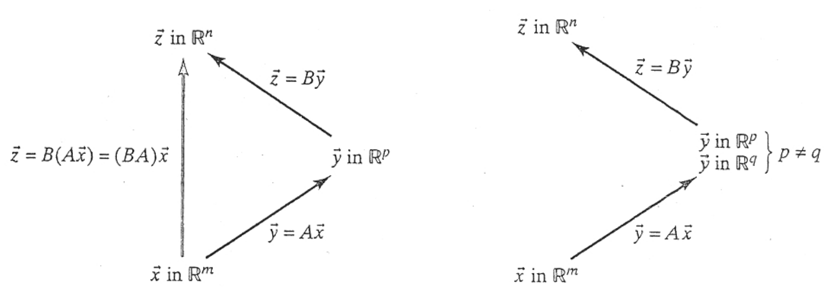
La matrice BA est celle d'une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et est donc de taille $n \times m$, et on a

$$z = B(Ax) = (BA)x.$$

Dans la définition du produit BA, le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A.

Que se passe-t-il quand ces deux nombres sont différents ? Supposons que B soit de taille $n \times p$ et A de taille $q \times m$ avec $p \neq q$.

Figure 5: Compatibilité colonnes/lignes



Dans ce cas, les applications $z = By$ et $y = Ax$ ne peuvent pas être composées car le co-domaine de $y = Ax$ est différent du domaine de $z = By$. Autrement dit, la sortie de l'application $y = Ax$ n'est pas une entrée raisonnable pour l'application $z = By$. Dans ce cas, la produit BA n'est pas défini.

> **Produit de matrices**
>
> a) Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $q \times m$. Le produit BA est défini si et seulement si $p = q$.
>
> b) Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times m$. Alors le produit BA, de taille $n \times m$ est défini comme étant la matrice de l'application linéaire composée $T(x) = B(Ax) = BAx$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Dans ce cas, le produit BA est une matrice de taille $n \times m$.

Cette définition ne semble pas donner de moyens concrets pour calculer numériquement le produit de deux matrices. Pourtant ce moyen concret suit directement des définitions.

Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times m$. Étudions les colonnes de la matrice produit BA :

$$\begin{aligned}(i^{\text{ème}}\text{colonne de } BA) &= (BA)e_i \\ &= B(Ae_i) \\ &= B(i^{\text{ème}}\text{colonne de } A).\end{aligned}$$

En notant $v_1, v_2, \cdots, v_m$ les colonnes de A, on a alors

$$BA = B\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Bv_1 & Bv_2 & \cdots & Bv_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

> **Les colonnes d'une matrice produit**
>
> Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times m$. On note $v_1, v_2, \cdots, v_m$ les colonnes de A. alors le prduit BA est défini par
>
> $$BA = B\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Bv_1 & Bv_2 & \cdots & Bv_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
>
> Pour déterminer BA il suffit d'effectuer la multiplication de B par chaque colonne de A et de recombiner en matrice l'ensemble des vecteurs ainsi déterminés.

C'est comme cela qu'on a calculé en (b) de l'exemple plus haut le produit

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 47 \\ 35 & 61 \end{bmatrix}.$$

On a vu dans la première section que la multiplication des matrices est une opération non-commutative, ce qui n'est pas une surprise. En effet, la composition des fonctions n'est pas une opération commutative.

La multiplication des matrices n'est pas commutative

Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times n$. Alors AB est une matrice de taille $p \times p$ et BA de taille $n \times n$. Dans le cas où $p = n$, on peut comparer les produits AB et BA.

En général, $AB \neq BA$. Néanmoins, il arrive parfois que $AB = BA$; dans ce cas, on dit que les matrices *commutent*.

Il est utile d'avoir une formule analytique pour la composante ij du produit BA. On rappelle que

$$BA = B \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Bv_1 & Bv_2 & \cdots & Bv_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

le coefficient ij du produit BA est la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur Bv_j, qui est le produit vecteur ligne vecteur colonne de la $i^{\text{ième}}$ ligne de B par la $j^{\text{ième}}$ colonne de A.

Si on note $[BA]_{ij}$ le coefficient à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice produit BA, on a alors

$$[BA]_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{ip}a_{pj} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj}.$$

Les coefficients de la matrice produit

Soient B une matrice de taille $n\times p$ et A une matrice de taille $p\times m$. Le coefficient ij du produit BA est le produit de la $i^{\text{ième}}$ ligne de B par la $j^{\text{ième}}$ colonne de A. La matrice

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix}$$

est la matrice de taille $n \times m$ dont le coefficient à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne est donné par la formule

$$[BA]_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{ip}a_{pj} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj}.$$

Exemple 1

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot 1 + 7\cdot 3 & 6\cdot 2 + 7\cdot 5 \\ 8\cdot 1 + 9\cdot 3 & 8\cdot 2 + 9\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 47 \\ 35 & 61 \end{bmatrix}.$$

Au fait, où a-t-on déjà vu ces calculs ?

1.3 Calculs algébriques avec les matrices

Nous allons décrire dans ce qui suit les prinicipes du calcul algébrique des matrices.

• Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, inversible. La matrice A multipliée par la matrice A^{-1} représente l'application identité.

Multiplication par l'inverse

Étant donnée A une matrice inversible carrée de taille $n \times n$, on a

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n.$$

• Composer l'application identité par une application linéaire des deux cotés, laisse invariante l'application linéaire considérée.

Multiplication par la matrice identité

Étant donnée A une matrice carrée de taille $n \times n$, on a

$$A\,\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n A = A.$$

• Soit A une matrice $n \times p$, B une matrice $p \times q$, C une matrice $q \times m$. Quelle est la relation entre $(AB)C$ et $A(BC)$?

Une manière de réfléchir à ce problème (même si ce n'est pas la plus élégante), consiste à écrire C à l'aide de ses vecteurs colonnes, $C = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned} (AB)C &= (AB)\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (AB)v_1 & (AB)v_2 & \cdots & (AB)v_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tandis-que

$$\begin{aligned} A(BC) &= A\begin{bmatrix} Bv_1 & Bv_2 & \cdots & Bv_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(Bv_1) & A(Bv_2) & \cdots & A(Bv_n) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Puisque $(AB)v_i = A(Bv_i)$ par définition du produit matriciel, on en déduit que $(AB)C = A(BC)$.

Associativité du produit matriciel

On a toujours

$$(AB)C = A(BC),$$

et on écrira ABC au lieu de $A(BC) = (AB)C$.

Une démonstration plus conceptuelle repose sur l'associativité de la composition des applications. Les deux application linéaires

$$T(x) = ((AB)C)x, \quad L(x) = (A(BC))x$$

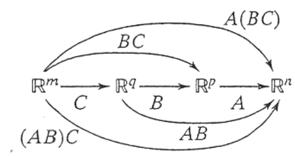
sont identiques, car la définition de la multiplication des matrices montre que

$$T(x) = ((AB)C)x = (AB)(Cx) = A(B(Cx)),$$

tandis-que

$$L(x) = (A(BC))x = A((BC)x)) = A(B(Cx)).$$

Figure 6: Associativité du produit matriciel



Les domaines et co-domaines respectifs des applications linéaires définies par les matrices A, B, C, BC, AB, $A(BC)$ et $(AB)C$ sont décrits dans la figure ci-dessous.

• Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$. On suppose A et B inversibles. Est-ce que le produit BA est encore inversible ?

Pour trouver la réciproque de l'appication linéaire

$$y = BAx,$$

on va résoudre l'équation en x en deux temps. On commence par multiplier à gauche les deux membres de cette équations par B^{-1} :

$$B^{-1}y = B^{-1}BAx = \mathrm{I}_n Ax = Ax.$$

On multiplie ensuite à gauche par A^{-1}. Il vient

$$A^{-1}B^{-1}y = A^{-1}Ax = \mathrm{I}_n x = x.$$

Ce calcul montre que l'application

$$y = BAx$$

est inversible et que son inverse est l'application

$$x = A^{-1}B^{-1}y.$$

Inverse d'un produit de matrices

Soient A et B deux matrices carrées inversibles de taille n. Alors le produit AB est inversible et on a

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Attention à l'ordre des produits !

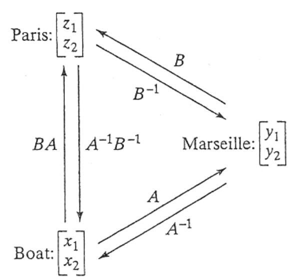
Pour vérifier ce résultat autrement, on effectue le calcul suivant, en utilisant l'associativité du produit,

$$(A^{-1}B^{-1})(BA) = A^{-1}(B^{-1}B)A = A^{-1}(\mathrm{I}_n)A = A^{-1}A = \mathrm{I}_n,$$

et tout marche très bien.

Pour mieux comprendre l'ordre des facteurs dans la formule $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$, repensons à notre histoire de bateau marseillais. Pour trouver la

Figure 7: Inverse d'un produit de matrices



position effective x à partir du double codage z, on commence par effectuer la transformation $y = B^{-1}z$ et *ensuite* la transformation $x = A^{-1}y$. Donc la réciproque de l'application $z = BAx$ est bien l'application $x = A^{-1}B^{-1}z$.

Un critère d'inversibilité

Soient A et B deux matrices carrées inversibles de taille n telles que

$$BA = \mathrm{I}_n.$$

Alors

a) A et B sont toutes les deux inversibles

b) $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$,

c) $AB = \mathrm{I}_n$.

La définition de l'inverse d'une application nous dit que lorsque $BA = \mathrm{I}_n$ **et** $AB = \mathrm{I}_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Le résultat ci-dessus dit que l'équation $BA = \mathrm{I}_n$ à elle seule suffit pour assurer que A et B soient inversibles et inverses l'une de l'autre.

Pour montrer que A est inversible, il nous suffit de montrer que le système linéaire $Ax = 0$ admet 0 comme unique solution (voir section 2.3). Multiplions à gauche l'équation $Ax = 0$ par B. On obtient $BAx = B0 = 0$. Comme $BA = \mathrm{I}_n$, il en résulte que $x = 0$. Donc A est inversible.

En multipliant à droite l'équation $BA = \mathrm{I}_n$ par A^{-1}, il vient

$$(BA)A^{-1} = \mathrm{I}_n A^{-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad B = A^{-1}.$$

La matrice B étant l'inverse de A est aussi inversible, et $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ (résulte des définitions). Enfin, $AB = AA^{-1} = \mathrm{I}_n$. ■

À titre d'application, considérons le cas $2D$. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec un déterminant non nul. On va vérifier que

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Pour cela il est suffisant de vérifier que $BA = \mathrm{I}_2$. On a

$$\begin{aligned} BA = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{I}_2 \end{aligned}$$

Exemple 2

Soient A, B et C trois matrices carrées de taille n telles que $ABC = \mathrm{I}_n$. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction A et C.

Solution

On écrit $ABC = (AB)C = \mathrm{I}_n$. On en déduit que AB et C commutent et sont inverses l'une de l'autre, d'où on a également $C(AB) = \mathrm{I}_n = (CA)B$. il en résulte que B est inversible et $B^{-1} = CA$.

Distributivité du produit matriciel

Soient A et B deux matrices de taille $n \times p$, C et D de taille $p \times m$. On a alors

$$\begin{aligned} &A(C + D) = AC + AD \quad \text{et} \\ &(A + B)C = AC + BC. \end{aligned}$$

Ce point sera à vérifier dans l'exercice 63, section 2.4, et le point suivant dans l'exercice 64 :

Soit A une matrice de taille $n \times p$, B de taille $p \times m$, $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$(kA)B = A(kB) = k(AB).$$

1.4 Calcul matriciel par blocs

Il est parfois utile de subdiviser une grosse matrice en sous-matrices (blocs) accolées les une aux autres. Par exemple, on peut considérer la matrice 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

comme étant une matrice 2×2 ayant pour coefficients quatre matrices 2×2

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

où $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, etc...

Le découpage peut être avec des matrices de taille différentes, par exemple on peut avoir

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ \hline 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

On a une intérssante propriété du partitionnement des matrices par blocs :

Calcul matriciel par blocs Le produit de matrices par bloc s'effectue de la même manière que le produit habituel, sauf que les coefficients sont remplacés par les blocs :

$$BA = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i1} & B_{i2} & \cdots & B_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & a_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pm} \end{bmatrix}$$

est la matrice dont le bloc labélisé par les indices i et j est est donné par la formule

$$[BA]_{ij} = B_{i1}A_{1j} + B_{i2}A_{2j} + \cdots + B_{ip}A_{pj} = \sum_{k=1}^{p} B_{ik}A_{kj},$$

sous réserve que les tailles des blocs soient compatibles pour pouvoir définir les produits matriciels $B_{ik}A_{kj}$.

La vérification de ce résultat est laissé en exercice.

Exemple 3

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c} -3 & -3 & -3 \\ 8 & 10 & 12 \end{array}\right]$$

Calculez le produit de l'exemple 3 par la méthode standard et comparez les résultats.

Cet exemple est donné juste à titre d'illustration et n'a pas une grande portée. Le calcul par bloc est souvent très utile dans des raisonnements théoriques ou bien qualitatif plus que qualitatif comme cela est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 4

Soit A la matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

où A_{11} est une matrice carrée de taille n ($A_{11} \in M_n(\mathbb{R})$), A_{22} est matrice carrée de taille m ($A_{22} \in M_m(\mathbb{R})$), et enfin A_{12} est une matrice $n \times m$ ($A_{12} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$).

a) Pour quelles matrices A_{11}, A_{22}, A_{12} la matrice A est-elle inversible.

b) Dans le cas où A est inversible, exprimer A^{-1} en fonction des matrice A_{11}, A_{22}, A_{12}.

Solution

On cherche $B \in M_{n+m}(\mathbb{R})$ telle que

$$BA = \mathrm{I}_{n+m} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix}.$$

On cherche la matrice B sous la forme par blocs

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

où $B_{11} \in M_n(\mathbb{R})$, $B_{22} \in M_m(\mathbb{R})$ et ainsi de suite. Le fait que B soit l'inverse de A conduit aux équations maricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix},$$

ce qui conduit en utilisant la règle de calculs par blocs, on obtient le système matriciel :

$$\left| \begin{array}{rcr} B_{11}A_{11} & = & \mathrm{I}_n \\ B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} & = & 0 \\ B_{21}A_{11} & = & 0 \\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} & = & \mathrm{I}_m \end{array} \right|.$$

La première équation implique que A_{11} doit être inversible et que l'on a $B_{11} = A_{11}^{-1}$.

En multipliant la troisième équation à droite par A_{11}^{-1} on obtient $B_{21} = 0$. La quatrième équation se simplifie alors en $B_{22}A_{22} = \mathrm{I}_m$. Il en résulte que A_{22} doit être inversible et que $B_{22} = A_{22}^{-1}$.

Finalement, la deuxième équation devient $A_{11}^{-1}A_{12} + B_{12}A_{22} = 0$, c'est-à-dire $A_{11}^{-1}A_{12} = -B_{12}A_{22}$, soit encore $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$.

Conclusion

a) A est inversible si et seulement si A_{11} et A_{22} sont inversibles (il n'y a aucune condition particulière sur A_{12}).

b) Lorsque A est inversible, son inverse est donnée par la matrice écrite en bloc :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{Exemple 5}}$ Vérifier ce résultat avec la matrice A suivante

$$A = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -3 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$