Chapitre 2

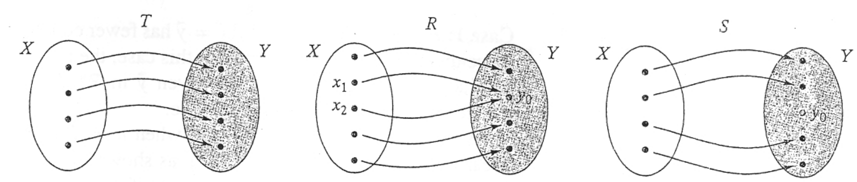
1 2.3. Réciproque d'une application linéaire

On commence par rappeler le concept d'application inversible.

Fonctions inversibles

Une application $T : X \to Y$ est dite inversible si, pour tout $y \in Y$, l'équation $T(x) = y$ admet une unique solution $x \in X$.

Figure 1:



T est inversible

R n'est pas inversible car l'équation $R(x) = y_0 \in Y$ admet deux solutions $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$;

S n'est pas inversible car il n'y a aucun $x \in X$ qui satisfasse $S(x) = y_0$

Soit $T : X \to Y$ inversible. Alors sa **réciproque** ("inverse" en anglais) $T^{-1} : Y \to X$ est définie par

$$T^{-1}(y) = (\text{l'unique } x \in X \text{tel que } T(x) = y).$$

Autrement dit,

$$T^{-1}(y) = x \quad \text{est équivalent à} \quad T(x) = y.$$

On notera que T^{-1} est une application. On a toujours

$$\forall\, x \in X, \quad T^{-1}(T(x)) = x, \quad (T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_X)$$

tandis que

$$\forall\, y \in Y, \quad T(T^{-1}(y)) = y, \quad (T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_Y)$$

Donc T^{-1} est inversible et on a l'identité

$$(T^{-1})^{-1} = T.$$

Lorsque l'application est définie par une expression analytique, on peut trouver sa réciproque en résolvant directement l'équation. Par exemple, l'inverse de

$$y = \frac{x^3 - 1}{5},$$

(bien définie sur $\mathbb{R}$) est donnée par l'expression

$$x = \sqrt[3]{5y + 1}.$$

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x},$$

où A est une matrice de taille $n \times m$. Cette application est inversible si et seulement si pour chaque $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$$

admet une solution unique $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$.

En utilisant les techniques de la section 1.3, on va déterminer pour quelles matrices A c'est le cas.

On distinguera successivement les cas

$$n < m,$$
$$n = m,$$
$$n > m.$$

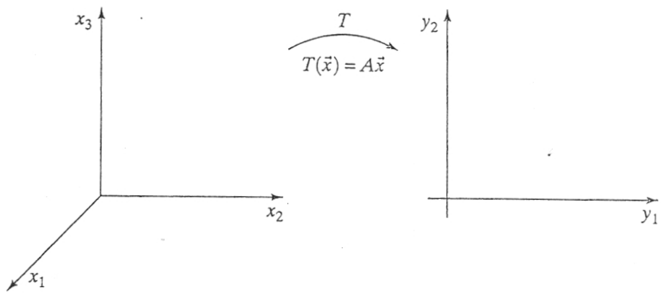
Cas 1 : $n < m$

Le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ a moins déquations (n) que d'inconnues (m). Donc étant donné $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, il doit y avoir des variables libres dans le système et dans ce cas, le système admet soit une infinité de solution, soit est inconsistant. Dans ce cas, l'application $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ n'est pas inversible.

A titre d'exemple, on considère le cas $m = 3$, $n = 2$, *i.e.* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Intuitivement, on doit s'attendre à ce qu'il y ait des "écrasements" si on veut transformer $\mathbb{R}^3$ linéairement en $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes, il faut

Figure 3: cas $m = 3$, $n = 2$



s'attendre à ce que plusieurs points de $\mathbb{R}^3$ aient la même image dans $\mathbb{R}^2$. Le raisonnement précédent montre que c'est exactement ce qui arrive, et l'équation

$$T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

admet une infinité de solutions (voir exercice 2.1.42 par exemple).

Il est surprenant cependant de savoir qu'il existe des applications inversibles, *non linéaires*, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

Cas 2 : $n = m$

On est dans le cas où le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ a autant d'équations que d'inconnues. On sait depuis la section 1.3 que ce système admet une unique solution si et seulement si

$$\mathrm{frel}(A) = \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que l'application $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ est inversible si et seulement si $\mathrm{frel}(A) = \mathrm{I}_n$, ou bien de manière équivalente si $\mathrm{rang} A = n$.

On considère les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ étudiées dans la section 2.2. A titre d'exercice, on peut observer que

- Les rotations sont inversibles,

- les symétries sont inversibles,
- les transvections (cisaillement) sont inversibles,
- Les projection othogonales sur une droite **ne sont pas** inversibles.

Cas 3 : $n > m$

Dans ce cas, l'application linéaire $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ n'est pas inversible. Pour montrer cela, on raisonne avec le rang de A et on se sert des résultats de la section 1.3. On rapelle que l'on a toujours rang$A \leq m$.

On commence par le cas rang$A < m$. Alors on sait (section1.3) que quelque soit $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ est soit inconsistant, soit admet une infinité de solutions. Dans ce cas, l'application linéaire n'est $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ n'est pas inversible.

On étudie le cas rang$A = m$. On sait que dans ce cas (section 1.3), quelque soit $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ admet au plus une solution. On fait l'hypothèse qu'il existe au moins un $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ pour lequel le système a une et une seule solution (sinon on saurait déjà que l'application n'est pas inversible). On pose $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Dans ce cas, la matrice réduite échelonée par ligne de la matrice augmentée du système est de la forme :

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & a_1 \\
0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & a_2 \\
0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & \vdots & a_3 \\
. & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & \vdots & a_m \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & 0
\end{array}\right], \quad \text{et on pose} \quad \overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

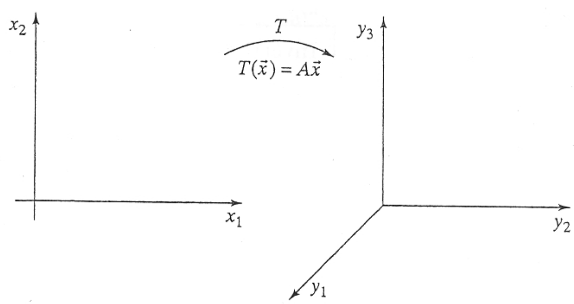
Considérons le vecteur

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

et soit $\overrightarrow{z} = G^{-1}(\overrightarrow{b})$. On vérifie sans difficulté que le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{z}$ est inconsistant. Donc, dans tous les cas, l'application linéaire $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ n'est pas inversible quand $m < n$.

A titre d'exemple, considérons le cas $n = 3$, $m = 2$. On comprends bien

Figure 4: cas $n = 3$, $m = 2$



intuitivement que l'on ne peut pas remplir tout $\mathbb{R}^3$ en plongeant linéairement $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Il y aura beaucoup de vecteurs $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels le système $T(\overrightarrow{x}) = y$ sera inconsistant.

> Une matrice A est dite **inversible** si l'application $y = Ax$ est inversible. La matrice de l'application réciproque est notée A^{-1}. Si l'application $y = Ax$ est inversible, alors la réciproque est l'application A^{-1}.

> **Inverse et forme réduite échelonnée par ligne**
>
> Une matrice A de taille $n \times m$ est inversible si et seulement si
>
> **a**. A est une matrice carrée, *i.e.* $n = m$,
>
> **b**. $\mathrm{frel}(A) = \mathrm{I}_n$.

Exemple 1

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, et on se demande si elle est inversible. Pour cela, on lui applique l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ -4(\mathrm{L}_1) \\ -7(\mathrm{L}_1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\div(-3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} -2(\mathrm{L}_2) \\ \\ 6(\mathrm{L}_2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{frel}(A).$$

La matrice A n'est pas inversible car $\mathrm{frel}(A) \neq \mathrm{I}_3$.

Inversion et systèmes linéaires

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

a) Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Si A est une matrice inversible, alors le système $Ax = b$ admet toujours une solution unique $x = A^{-1}b$. Si A n'est pas inversible, alors le système $Ax = b$ a soit une infinité de solutions, soit aucune.

b) On considère le cas particulier $b = 0$. Le système $Ax = 0$ admet toujours $x = 0$ comme solution. Si A est inversible, 0 est l'unique solution de ce système. Si A n'est pas inversible, alors le système $Ax = 0$ a une infinité de solutions.

Etant donnée une matrice A inversible, on se demande comment déterminer A^{-1} d'un point de vue pratique. On utilise l'algorithme de Gauss-Jordan comme on le montre sur l'exemple suivant.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix},$$

qui définit l'application linéaire

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la réciproque de cette application, on résoud le système suivant avec x_1, x_2, x_3 pour inconnues,

$$\left|\begin{array}{rcrcrclll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & & \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & & y_2 & \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & & & y_3 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ -2(\mathrm{L}_1) \\ -3(\mathrm{L}_1) \end{array} \left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & & & & \\ & & x_2 & & & = & -2y_1 & + & y_2 & & \\ & & 5x_2 & - & x_3 & = & -3y_1 & & & + & y_3 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{r} -(\mathrm{L}_2) \\ \\ -5(\mathrm{L}_2) \end{array} \left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 3y_1 & - & y_2 & & \\ & & x_2 & & & = & -2y_1 & + & y_2 & & \\ & & & - & x_3 & = & 7y_1 & - & 5y_2 & + & y_3 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \div(-1) \end{array} \left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 3y_1 & - & y_2 & & \\ & & x_2 & & & = & -2y_1 & + & y_2 & & \\ & & & & x_3 & = & -7y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{r} -(\mathrm{L}_3) \\ \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & & & = & 10y_1 & - & 6y_2 & + & y_3 \\ & & x_2 & & & = & -2y_1 & + & y_2 & & \\ & & & & x_3 & = & -7y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 \end{array}\right| ,$$

ce qui fait que la matrice inverse de la matrice A est la matrice

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix} .$$

On peut aussi décrire les calculs précédents sous la forme matricielle suivante,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ -2(\mathrm{L}_1) \\ -3(\mathrm{L}_1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & \vdots & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{r} -(\mathrm{L}_2) \\ \\ -5(\mathrm{L}_2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & \vdots & 7 & -5 \\ 1 & & & & & & \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \div(-1) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} -(l_3) \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

Détermination de l'inverse d'une matrice

Pour trouver l'inverse d'une matrice A de taille $n \times n$, on forme la matrice $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I}_n \end{array}\right]$ de taille $n \times (2n)$ et on calcule frel$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I}_n \end{array}\right]$.

- Si frel$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I}_n \end{array}\right]$ est de la forme $\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & B \end{array}\right]$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Si frel$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I}_n \end{array}\right]$ a une autre forme (*i.e.* le membre de gauche n'est pas égal à I_n), alors A n'est pas inversible.

  La partie gauche de frel$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I}_n \end{array}\right]$ est égal à frel(A).

L'inverse d'une matrice 2×2 est facile à calculer (*cf* exercices)

Inverse et déterminant d'une matrice 2×2

a) La matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
La quantité $ad - bc$ est appelée le **Déterminant** de la matrice A et est noté $\det(A)$,

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

b) Si la matrice A est inversible, alors

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$