1 2.2. Les application linéaires en géométrie

Dans l'exemple 2.1.5, on a vu que la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ représente une rotation de 90° dans le sens trigonométrique. De nombreuses matrices 2×2 représentent également des transformations géométriques simples.

Cette section a pour objet l'étude de quelques transformations géométriques, essentiellement dans le plan.

Exemple 1

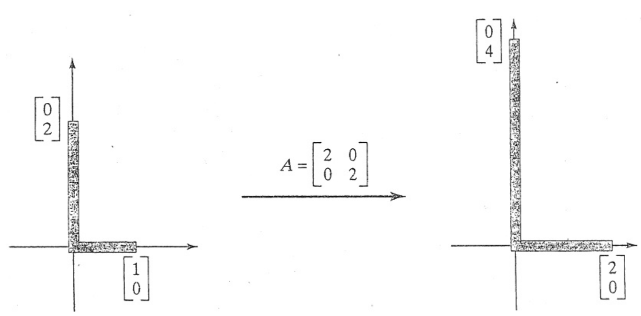
On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Décrire les effets de chacune de ces matrices sur notre lettre L (en rappelant que son pied et le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et son "dos" le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$).

Figure 1: Matrice A



Dans la Figure 1, notre lettre L est dilatée par un facteur 2. On appelle cette application **l'homothétie vectorielle** de rapport 2.

Dans la Figure 2, notre lettre L est ratatinée sur l'axe horizontal. On appelle cette transformation la **projection sur l'axe horizontal**.

Figure 2: Matrice B

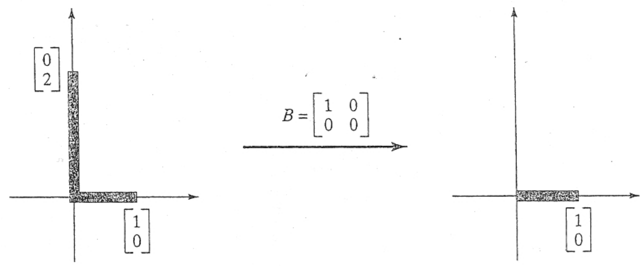


Figure 3: Matrice C

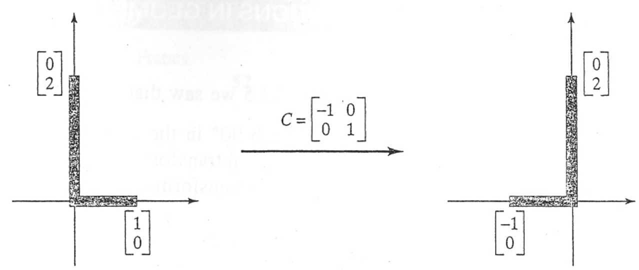
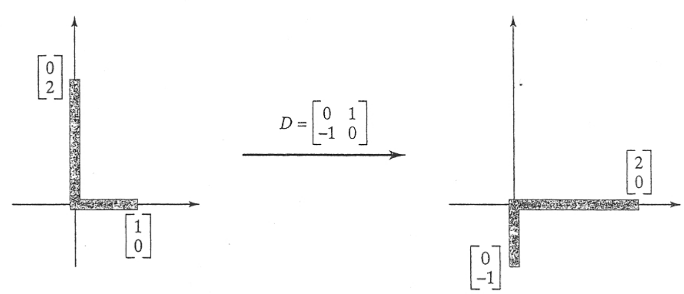


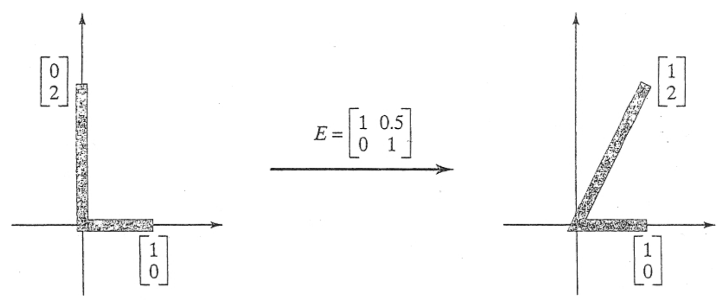
Figure 4: Matrice D



Dans la Figure 3, notre lettre L s'est retournée sur elle même par rapport à l'axe vertical. On appelle cette transformation la **symétrie par rapport à l'axe vertical**.

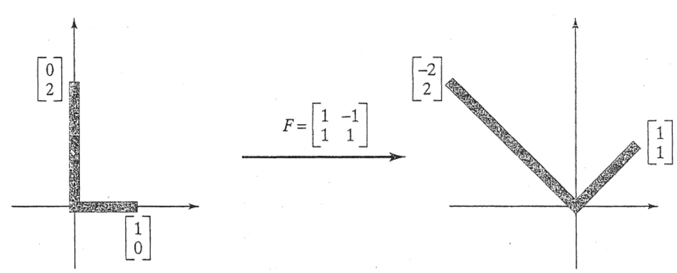
Dans la Figure 4, notre L a tourné de 90°, dans le sens des aiguilles d'une montre. Ce résultat est l'opposé de ce que nous avons eu dans l'exemple 2.1.5.

Figure 5: Matrice E



Dans la Figure 5, le pied du L n'a pas bougé, tandisque que le dos s'est penché horizontalement vers la droite, notre lettre devient *L* (en italique=. Cette transformation est appelée en Mathématiques une **transvection** horizontale. En mécanique et en sciences de l'ingénieur, on parle aussi d'un **cisaillement horizontal** (d'après la terminologie anglo-saxone : "horizontal shear").

Figure 6: Matrice F



Dans la Figure 6, d'une part la lettre L a tourné de 45° dans le sens trigonométrique, mais en plus a été dilatée d'un rapport de $\sqrt{2}$. Il sagit d'une **rotation composée par une homothétie vectorielle**.

Les applications et leurs compositions possibles que l'on vient de voir, sont particulièrement importantes en mathématiques pures, mais dans bien d'autres domaines comme par exemple la mécanique et les sciences de l'ingénieur.

Homothéties vectorielles (scaling en anglais)

Pour toute constante positive k, la matrice $H_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ est une homothétie vectorielle, puisque

$$H_k \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix} = k \overrightarrow{x}.$$

Lorsque $k > 1$, il s'agit d'une **dilatation**, lorsque $k < 1$, on parle de **contraction**.

- On remarque que $H_1 = \mathrm{I}_2$, et que d'une manière générale, $H_k = k\mathrm{I}_2$.

- On peut définir bien entendu une homothétie vectorielle pour $k < 0$. Mais dans ce cas, elle est la composée de l'homothétie de rapport $-k$ et de la symétrie centrale $\overrightarrow{x} \to -\overrightarrow{x}$.

Projections.

Considérons une droite L (pour "line" en anglais) dans le plan qui passe par l'origine. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur quelconque. Il peut être décomposé de manière unique sous la forme

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp},$$

où $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à la droite L et $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à la droite L (voir figure (a) ci-dessous)

L'application

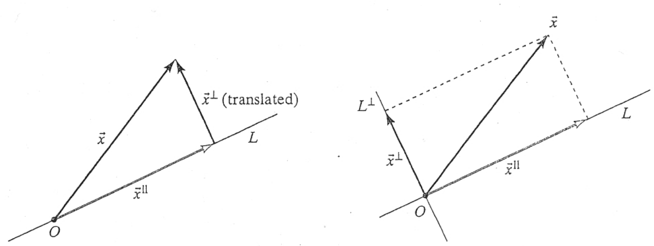
$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \overrightarrow{x} \longrightarrow \overrightarrow{x}^{||}, \end{cases}$$

est appelée la projection de $\overrightarrow{x}$ sur la droite L, et notée

$$\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||}.$$

On peut voir $\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x})$ comme étant l'ombre de $\overrightarrow{x}$ projetée sur L que l'on éclaire directement.

Figure 7: (a) (b)



Soit $L^{\perp}$ la droite orthogonale à L. On remarque que $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est parallèle à $L^{\perp}$. Par conséquent, on peut interpréter $\overrightarrow{x}^{\perp}$ comme étant le projeté de $\overrightarrow{x}$ sur la droite $L^{\perp}$ (voir figure (b)).

On peut utiliser le produit vecteur ligne vecteur colonne pour déterminer une formule analytique qui décrit la projection. Pour cela, on considère un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ parallèle à la droite L. Comme $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à L, il existe un scalaire $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{x}^{||} = k\overrightarrow{u}.$$

On remarque ensuite que

$$\overrightarrow{x}^{\perp} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^{||} = \overrightarrow{x} - k\overrightarrow{u},$$

et que ce vecteur est perpendiculaire à la droite L. Par conséquent,

$$(\overrightarrow{x} - k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{u} = 0,$$

d'où l'on déduit, puisque $\overrightarrow{u}$ est unitaire, ($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2 = 1$)

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u} - k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u} - k = 0,$$

c'est-à-dire

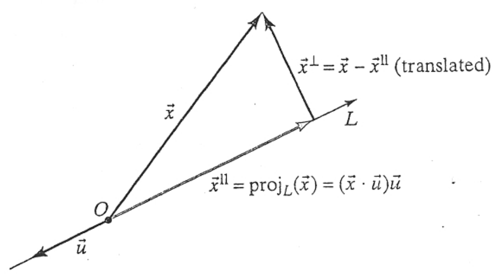
$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u} = k.$$

On en déduit finalement que

$$\text{proj}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||} = k\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

Il se pose la question de savoir si cette projection est bien une application linéaire et quelle est sa matrice.

Figure 8: Description de la projection



Écrivons

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Alors, on a

$$\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} =$$

$$(x_1 u_1 + x_2 u_2) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 x_1 + u_1 u_2 x_2 \\ u_1 u_2 x_1 + u_2^2 x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} \overrightarrow{x},$$

ce qui montre la linéarité de la projection. On notera que la matrice de proj_L est symétrique, c'est-à-dire que les termes qui sont au dessus et en dessous de la diagonale sont égaux.

Exemple 2

Trouver la matrice A de la projection sur la droite D qui a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solution. Il nous suffit juste de connaitre un vecteur directeur unitaire de la droite D, lequel est défini par

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} = \frac{1}{5}\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

Il suffit à présent d'utiliser la formule précédente, avec $u_1 = 0.8$ et $u_2 = 0.6$, ce qui donne

$$A = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.36 \end{bmatrix}.$$

Projections.

Soit L une droite dans le plan qui passe par l'origine. Chaque vecteur du plan $\overrightarrow{x}$ admet une unique décomposition

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp},$$

où $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à L et où $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à L.

L'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \overrightarrow{x} \longrightarrow T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||}, \end{cases}$$

est la projection sur la droite L, souvent notée proj_L.

Etant donné $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ un vecteur directeur unitaire de la droite L, alors on a pour chaque vecteur $\overrightarrow{x}$

$$\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

Enfin l'application $\overrightarrow{x} \rightarrow \mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x})$ est linéaire et admet pour matrice la matrice

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}.$$

Remarque. *La notion de projection que nous avons défini ici, est en fait une notion de* <u>*projection orthogonale*</u>*. Ce concept peut se généraliser à une classe plus vaste de projecteurs. Dans la suite et sauf mention du contraire, lorsque l'on parlera de projection, il sagira toujours d'une projection orthogonale comme elle l'a été définie plus haut*

Symétries

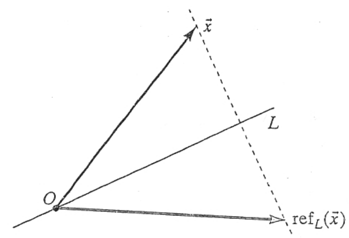
On considère de nouveau une droite L (pour "line" en anglais) dans le plan qui passe par l'origine. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur du plan. Le vecteur symétrique de $\overrightarrow{x}$ par rapport à L est représenté sur la figure ci-dessous, et on le note $\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x})$ (noté sur le dessin $\mathrm{ref}_L(\overrightarrow{x})$, pour "reflection" en anglais)

On fait "tourner" le vecteur $\overrightarrow{x}$ autour de la droite L.

Dans les cours précédents, on a déjà vu des exemples de symétrie par rapport à l'axe horizontal et l'axe vertical (en comparant les graphes de $y = f(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ par exemple).

On utilise à nouveau la décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp}$ pour obtenir une

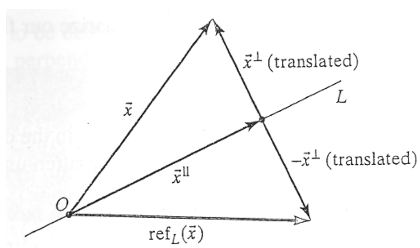
Figure 9: Représentation de $\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x})$ (notée $\mathrm{ref}_L(\overrightarrow{x})$ sur la figure)



fomule qui caractérise $\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x})$. On observe graphiquement que

$$\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{\|} - \overrightarrow{x}^{\perp}.$$

Figure 10: Décomposition de $\overrightarrow{x}$



On peut exprimer $\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x})$ à l'aide seulement de $\overrightarrow{x}^{\perp}$ ou bien encore de $\overrightarrow{x}^{\|}$ comme suit :

$$\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{\|} - \overrightarrow{x}^{\perp} = (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^{\perp}) - \overrightarrow{x}^{\perp} = \overrightarrow{x} - 2\,\overrightarrow{x}^{\perp},$$

et aussi

$$\begin{aligned} \mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) \ &= \overrightarrow{x}^{\|} - (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^{\|}) &&= 2\,\overrightarrow{x}^{\|} - \overrightarrow{x} \\ &= 2\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} &&= 2\,(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}. \end{aligned}$$

Cette dernière formule garantie la linéarité de l'opérateur sym_L et nous permet d'en trouver sa matrice qui est

$$2\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} - \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 2u_1^2-1 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & 2u_2^2-1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant le fait que $\overrightarrow{u}$ soit unitaire, on remarque que l'égalité $u_1^2+u_2^2 = 1$, conduit à

$$\begin{array}{rcl} a \;= 2u_1^2 - 1 & = & 2u_1^2 - (u_1^2 + u_2^2) = u_1^2 - u_2^2, \\ 2u_2^2 - 1 & = & 2u_2^2 - (u_1^2 + u_2^2) = u_2^2 - u_1^2 = -a. \end{array}$$

Il en résulte que la matrice sym_L est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix},$$

avec $a = u_1^2 - u_2^2, b = 2u_1u_2$ où u_1 et u_2 sont les coordonnées d'un vecteur unitaire de la droite L.

On remarque également que

$$\begin{array}{rcl} \underline{a^2 + b^2} & = & (u_1^2 - u_2^2)^2 + 4u_1^2u_2^2 = u_1^4 - 2u_1^2u_2^2 + u_1^4 + 4u_1^2u_2^2 \\ & = & u_1^4 + 2u_1^2u_2^2 + u_1^4 = (u_1^2 + u_2^2)^2 \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad = \underline{1}, \end{array}$$

toujours parce que $\overrightarrow{u}$ est unitaire.

On peut montrer le fait suivant (voir les exercices). Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui admet une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

alors il existe une droite L telle que

$$T = \mathrm{sym}_L.$$

Symétries

Soit L une droite dans le plan qui passe par l'origine. On décompose un vecteur du plan $\overrightarrow{x}$ sous la forme

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp},$$

où $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à L et où $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à L. L'application linéaire $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||} - \overrightarrow{x}^{\perp}$ est la symétrie par rapport à la droite L et est souvent notée sym_L :

$$\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||} - \overrightarrow{x}^{\perp}.$$

La formule suivante relie $\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x})$ et $\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x})$:

$$\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = 2\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = 2\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}.$$

La matrice de la symétrie est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

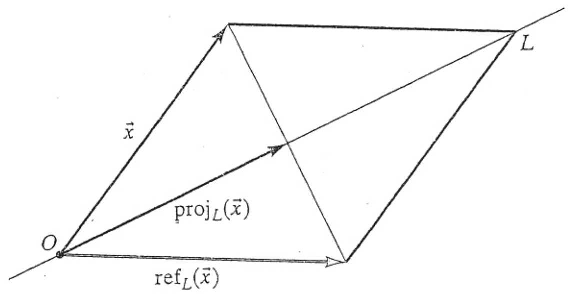
avec $a = u_1^2 - u_2^2, b = 2u_1u_2$ où u_1 et u_2 sont les coordonnées d'un vecteur unitaire de la droite L.

Remarque. *Ici, on a défini uniquement des symétries orthogonales. Ce concept peut se généraliser. Dans la suite du cours, on ne considère que des symétries orthogonales, sauf mention du contraire.*

La figure suivante permet de comprendre la formule

$$\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = 2\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}.$$

Figure 11: Symétrie avec un parallèlogramme



Projections et Symétrie dans l'espace

Bien que le chapitre soit consacré au cas de la dimension 2, on va étudier rapidement les symétries et les projections dans le cas de la dimension 3, dans la mesure où la théorie est la même.

Soit L une droite dans l'espace qui passe par l'origine. On peut encore décomposer un vecteur $\overrightarrow{x}$ de l'espace de manière unique sous la forme

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp},$$

où $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à L et où $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à L. On définit encore

$$\text{proj}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||},$$

et on a la formule

$$\text{proj}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u},$$

où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur unitaire de L.

On définit la symétrie par rapport à L comme

$$\text{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||} - \overrightarrow{x}^{\perp},$$

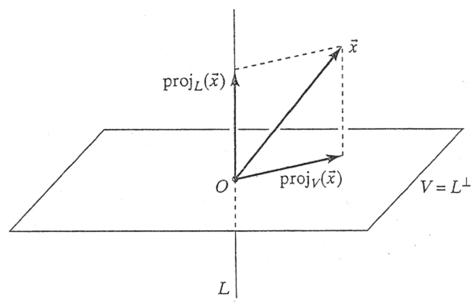
et on a la formule

$$\text{sym}_L(\overrightarrow{x}) = 2\text{proj}_L(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = 2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}$$

Soit $V = L^{\perp}$ le plan qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire à la droite L. On note que $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est parallèle au plan V, ce qui permet de définir la projection orthogonale sur le plan V comme étant

$$\text{proj}_V(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{\perp}.$$

Figure 12: Projection dans l'espace



On peut déterminer analytiquement $\text{proj}_V(\overrightarrow{x})$. En effet, on a toujours

$$\overrightarrow{x} = \text{proj}_V(\overrightarrow{x}) + \text{proj}_L(\overrightarrow{x}),$$

d'où

$$\text{proj}_V(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \text{proj}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

De même pour la symétrie, on définit

$$\begin{aligned} \text{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \text{proj}_L(\overrightarrow{x}) - \text{proj}_V(\overrightarrow{x}) \quad &= 2\text{proj}_L(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} \\ &= 2\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}. \end{aligned}$$

et on a

$$\text{sym}_V(\overrightarrow{x}) = \text{proj}_V(\overrightarrow{x}) - \text{proj}_L(\overrightarrow{x}) = -\text{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

On a les formules, en fonction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de la droite L
Projection sur la droite L

$$\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

Symétrie par rapport à L

$$\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = 2\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}$$

Projection sur le plan V

$$\mathrm{proj}_V(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

Symétrie par rapport à V

$$\mathrm{sym}_V(\overrightarrow{x}) = -\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

Exemple 3

Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ le plan admettant pour équation cartésienne $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ et soit $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Déterminer $\mathrm{sym}_V(\overrightarrow{x})$.

Solution. Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ est un vecteur orthogonal à V. Par conséquent,

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{||\overrightarrow{v}||}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

est un vecteur unitaire perpendiculaire à V. On peut utiliser les formules déterminées précédement.

$$\mathrm{sym}_V(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2\,(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} \;=\; \begin{bmatrix} 5\\ 4\\ -2\end{bmatrix} - \frac{2}{9}\left(\begin{bmatrix} 5\\ 4\\ -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\\ 4\\ -2\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$$

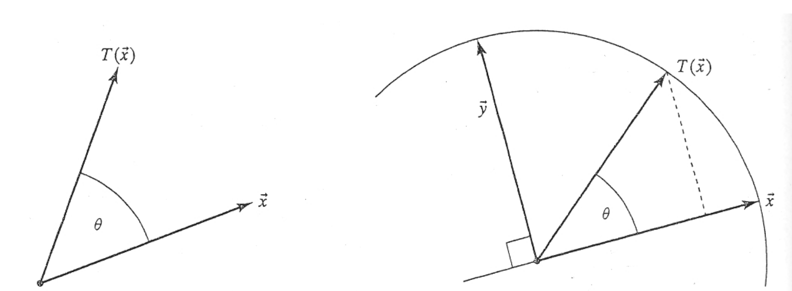
$$= \begin{bmatrix} 5\\ 4\\ -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8\\ 4\\ -8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3\\ 0\\ 6\end{bmatrix}$$

Rotations.

On considère l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui fait tourner un vecteur $\overrightarrow{x}$ quelconque dans le sens trigonométrique d'un angle θ fixé, comme on le montre dans la figure ci-dessous. Notons que dans l'exemple 2.1.5, on

Figure 13: Rotation d'angle θ



a étudié le cas $\theta = \pi/2$.

On rappelle la notion de coordonnées polaires.

A un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on associe un couple (r, ρ) où r est un réel positif ou nul et ρ un angle entre 0 ret 2π tels que

$$x = rcos(\rho)$$

$$y = rsin(\rho)$$

Notons que si $\overrightarrow{x}$ a pour coordonnées polaires (r, ρ), alors $\overrightarrow{t} = T(\overrightarrow{x})$ a pour coordonnée polaires $(r, \rho + \theta)$.

On rappelle les formules trigonométriques pour la somme des angles

$$cos(\rho + \theta) = cos(\rho)cos(\theta) - sin(\rho)sin(\theta)$$

$$sin(\rho + \theta) = cos(\rho)sin(\theta) + sin(\rho)cos(\theta)$$

Déterminons la matrice de T. On pose $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rcos(\rho) \\ rsin(\rho) \end{bmatrix}$, et on introduit le vecteur $\overrightarrow{y}$ déduit de $\overrightarrow{x}$ par une rotation d'angle θ. On a alors $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} rcos(\rho+\theta) \\ rsin(\rho+\theta) \end{bmatrix}$. En utilisant les formules trigonométriques pour la somme des angles, on a

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} rcos(\rho+\theta) \\ rsin(\rho+\theta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rcos(\rho)cos(\theta) - rsin(\rho)sin(\theta) \\ rcos(\rho)sin(\theta) + rsin(\rho)cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2 \\ \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \overrightarrow{x}. \end{aligned}$$

Le calcul qui précède montre que T est bien linéaire et admet pour matrice la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Rotation La matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'angle θ est la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

qui est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$.

Exemple 4

La matrice d'une rotation d'angle $\pi/6$ ($= 30°$) est la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Rotations composées avec des homothéties

Exemple 5

Soient a et b deux nombres réels quelconques. Étudions comment l'application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par

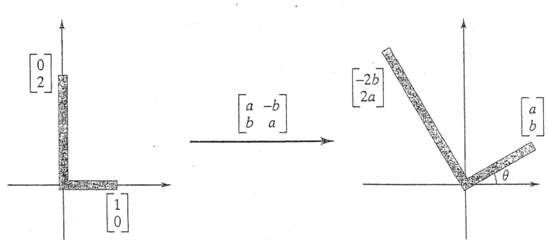
$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \overrightarrow{x},$$

agit sur notre lettre L.

Solution.

La figure ci-dessous suggère que T est la composée d'une rotation avec une homothétie.

Figure 14: Rotation d'angle θ

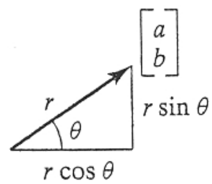


On raisonne en utilisant les coordonnées polaires : il sagit d'une rotation dont l'angle est l'angle de phase du vecteur $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, composée avec l'homothétie de rapport sa norme $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On vérifie cette affirmation en écrivant $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{bmatrix}$, On a alors

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Figure 15: Coordonnées polaires

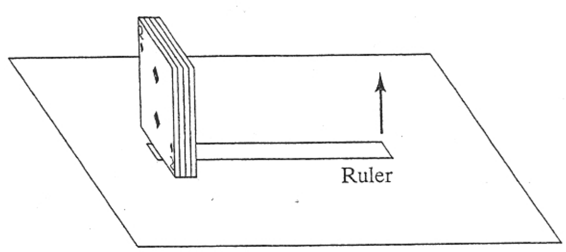


> **Rotation composée avec une homothétie**
>
> Une matrice de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ est la matrice d'une rotation composée avec une homothétie.
>
> On désigne par r et θ les coordonnées polaires du vecteur $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, alors l'angle de la rotation est de mesure θ et r est le rapport de l'homothétie.

Transvections (cisaillements)

On introduit les transvections avec une expérience qui utilise un jeu de carte et une règle. Les cartes sont maintenues en position verticale, le bord

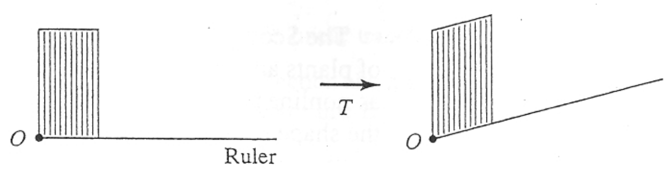
Figure 16: Un jeu de cartes sur une règle



de la règle sur lequel repose le 2 de carreau est fixe, et on soulève l'autre bout de la règle.

La figure ci-dessous montre l'expérience vue sur la tranche du jeu de cartes. Ce type de transformation est appelée *transvection verticale*. L'expérience est dans l'espace, mais si on ne considère que la vue sur la tranche, on est

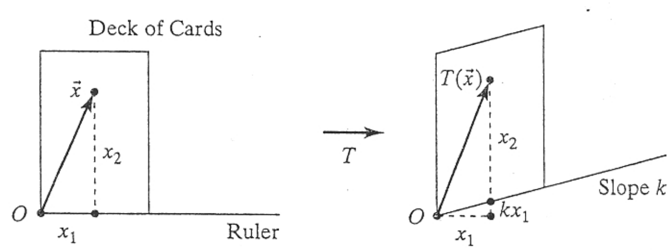
Figure 17: Déformation du jeu de cartes



conduit à étudier une transformation dans le plan.

On trace un vecteur $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sur la tranche du jeu de cartes et on cherche une formule analytique pour déterminer $T(\overrightarrow{x})$, en se guidant avec la figure ci dessous. Dans ce qui suit, k désigne la pente de la règle après

Figure 18: Déformation de la tranche du jeu de cartes



l'expérience.

On a

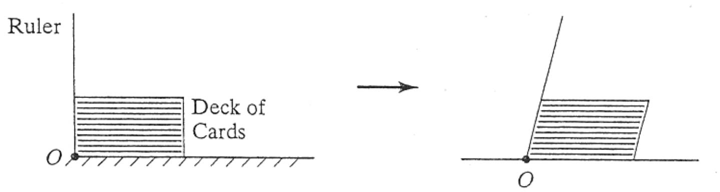
$$T(\overrightarrow{x}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{x}.$$

On en déduit que la matrice de T est une matrice de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ où k est une constante réelle.

On peut aussi définir les transvections horizontaux, comme sur la figure ci-dessous

On laisse en exercice la vérification que la matrice d'une transvection horizontale est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (voir l'exemple 1).

Figure 19: Transvection horizontale



Les transvections obliques sont également très importants dans les applications, mais on ne les étudie pas pour le moment.

Transvection verticale et horizontale

La matrice d'une transvection verticale est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, et la matrice d'une transvection horizontale est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$ est u constante arbitraire.

Des chercheurs du collège écossais d'Arcy, ont montré comment on peut déduire la forme d'une espèce de celle d'une espèce proche, que ce soit pour les animaux ou les plantes, en utilisant des applications linéaires aussi bien de des transformations non linéaires.

Ci dessous, on utilise un transvection horizontale pour transformer la forme d'une espèce de poisson en une autre.

Figure 20: Transvection horizontale sur des poissons