Chapitre 2: Applications linaires

1 Introduction aux applications linéaires

Imaginez que vous êtes membre d'un bateau de gardes maritimes en méditeranée en train de rechercher des trafiquants (dangereux !). Périodiquement, vous envoyez par radio votre position au port de Marseille, position définie par

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

où x_1 est la longitude est, x_2 la latitude nord. Vous pensez que vos émissions sont captées par les trafiquants. Aussi, vous les codez par de nouvelles variables

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

en utilisant le code suivant

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & = & x_1 & + & 3x_2, \\ y_2 & = & 2x_1 & + & 5x_2. \end{array}$$

Par exemple, si votre position est 5° E, 42° N, ou bien encore

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 42 \end{bmatrix},$$

et votre position codée est

$$\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131 \\ 220 \end{bmatrix},$$

Le codage peut être encore écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

soit encore

$$\boxed{\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Une "*application*" de la forme

$$\overrightarrow{x} \longrightarrow \overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$$

est appelée une **application linéaire**. On rapellera le concept général "d'application" un peu plus loin.

Ce chapitre a pour objet l'étude détaillée de ce concept fondamental.

Lorsque le bateau atteint une nouvelle position, l'officier de service au port reçoit le message codé

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 133 \\ 223 \end{bmatrix}.$$

Il doit déterminer la position du bateau, et pour cela il doit résoudre le système

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b},$$

c'est-à-dire

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 133 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & 223 \end{array} \right|,$$

qui a pour solution

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 43 \end{bmatrix}.$$

Au bout du $20^{\text{ième}}$ système à résoudre, l'officier de service au port est un peu fatigué. Il se demande s'il ne peut pas résoudre le système général

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & y_2 \end{array} \right|,$$

où y_1 et y_2 peuvent prendre n'importe quelle valeur. En clair, il voudrait coder l'application

$$\overrightarrow{y} \longrightarrow \overrightarrow{x},$$

qui est la "réciproque" de l'application

$$\overrightarrow{x} \longrightarrow \overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}.$$

Pour résoudre cette question, il n'y a pas grand chose de nouveau. On utilise la métode d'élimination.

$$\left|\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 3x_2 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & y_2 \end{array}\right| \text{(L2)} \leftarrow \text{(L2)} - 2\text{(L1)}, \quad \rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & y_1 \\ & - & x_2 & = & -2y_1 + y_2 \end{array}\right| \text{(L2)} \leftarrow \text{(L2)} \div (-1) \quad \rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & y_1 \\ & & x_2 & = & 2y_1 - y_2 \end{array}\right| \text{(L1)} \leftarrow \text{(L1)} - 3\text{(L2)}, \quad \rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{rrcr} x_1 & & = & -5y_1 + 3y_2 \\ & x_2 & = & 2y_1 - y_2 \end{array}\right|$$

Donc le code est donné par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= -5y_1 + 3y_2, \\ x_2 &= 2y_1 - y_2, \end{aligned}$$

soit encore

$$\overrightarrow{x} = B\overrightarrow{y}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

On peut le revoir au niveau des matrices: on met la matrice de la transformation qu'on étudie à gauche et la matrice identité à droite et on utilise des transformations élémentaires sur les lignes pour faire apparaître la matrice identité à gauche: on a trouvé l'application linèaire réciproque.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{(L2)} \leftarrow \text{(L2)} - 2\text{(L1)}, \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \text{(L2)} \leftarrow \text{(L2)} \div (-1) \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \text{(L1)} \leftarrow \text{(L1)} - 3\text{(L2)}, \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Par conséquent "l'application" $\overrightarrow{x} = B\overrightarrow{y}$ est la réciproque de l'application $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$. On dit que la matrice B est la matrice inverse de la matrice A et on pose $B = A^{-1}$.

Toutes les applications linéaires n'ont pas forcément de réciproque. Supposons qu'un officier un peu étourdi sur le bateau, choisisse le code

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & = & x_1 & + & 2x_2 \\ y_2 & = & 2x_1 & + & 4x_2 \end{array}, \quad \text{qui admet pour matrice} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

et lorsque l'officier de garde au port veux décoder la position, avec par exemple

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 89 \\ 178 \end{bmatrix},$$

il va découvrir avec un peu d'embarras que le système correspondant

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 89 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 178 \end{array} \right|$$

admet une infinité de solutions,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 - 2t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Puisque ce système n'admet pas une unique solution, il est impossible de déduire la position du bateau avec ce code. L'application linéaire sous-jacente n'admet pas de réciproque, et la matrice A n'est pas inversible. Ce code est inutile !

Applications

On commence par rappeler le concept d'**application**.

Soient X et Y deux ensembles. On dit qu'une relation (ou transformation) T entre X et Y est une **application** de graphe G_T, lorsque tout élément de X possède exactement une image dans Y, c'est-à-dire s'il vérifie les deux propriétés

$$\forall\, x \in X, \exists y_1 \in Y \quad ((x,y) \in G_T$$

$$\forall\, x \in X, \forall y_1 \in Y, \forall y_2 \in Y, \quad ((x,y_1) \in G_T \text{ et } (x,y_2) \in G_T) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

On dit que X est l'ensemble de départ de T, Y son ensemble d'arrivée. On parle parfois de x comme l'entrée, et de y comme la sortie.

Par le passé, vous avez étudié des applications pour lesquelles les entrées sorties sont des scalaires, comme par exemple

$$y = x^2, \quad f(x) = e^x.$$

Vous avez pu aussi croiser des applications pour lesquelles l'entrée-sortie est vectorielle, comme

Exemple 1

$$y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

qui définit une application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, l'entrée étant le vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, et la sortie le scalaire correspondant.

Exemple 2

On considère la formule

$$\overrightarrow{r} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix},$$

formule qui défini une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ avec t en entrée et $\overrightarrow{r}$ en sortie.

Applications linéaires
Une application $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une *application linéaire* si il existe une matrice A de taille $n \times m$, telle que pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$.

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x},$$

On pourra aussi parler de "transformation linéaire" (terminologie anglo-saxone) au lieu "d'application linéaire" (terminologie utilisée d'habitude en France).

Il est important de noter que les applications linéaires sont des cas particulier d'applications. Les entrées et les sorties sont des vecteurs. Si on note $\overrightarrow{y}$ le vecteur sortie $T(\overrightarrow{x})$, alors on peut écrire

$$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}.$$

Écrivons cette relation composante par composante.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix},$$

ou bien encore

$$\begin{array}{ll} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \\ . & . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . & . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . & . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m. \end{array}$$

Les variables de sortie y_i dépendent linéairement des variables d'entrée x_j.

Exemple 3

L'application linéaire qui va de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{lllllllll} y_1 & = & 7x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4, \\ y_2 & = & 6x_1 & + & 2x_2 & - & 8x_3 & + & 7x_4, \\ y_3 & = & 8x_1 & + & 4x_2 & & & + & 7x_4, \end{array}$$

admet pour matrice

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 & 8 \\ 6 & 2 & -8 & 7 \\ 8 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Exemple 4

La transformation identité sur $\mathbb{R}^n$,

$$\left\{ \begin{array}{l} IR^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \overrightarrow{x} \longrightarrow \overrightarrow{x}, \end{array} \right.$$

définie par les équations,

$$\begin{array}{lll} y_1 & = & x_1 \\ y_2 & = & \quad x_2 \\ . & & \qquad . \\ . & & \qquad\quad . \\ . & & \qquad\qquad . \\ . & & \qquad\qquad\quad . \\ y_n & = & \qquad\qquad\qquad x_n \end{array}$$

admet pour matrice la matrice carré I_n, de taille $n \times n$ (qui est diagonale et qui n'a que des 1 sur la diagonale). On rappelle que le système à n équations et n inconnues, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, a une et une seule solution si et seulement si $\mathrm{frel}(A) = \mathrm{I}_n$.

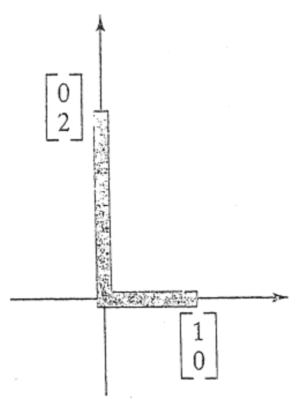
Exemple 5

Considérons la lettre L (voir figure slide suivant) constituée par les vecteurs $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$. Décrire l'effet sur la lettre L de la transformation linéaire définie par

$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\overrightarrow{x},$$

et décrire cette transformation avec des mots simples.

Figure 1: La lettre L



Solution.

On a

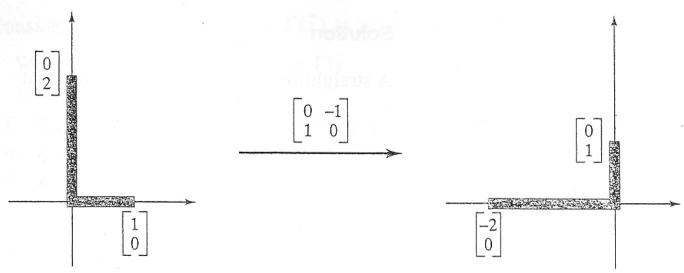
$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix},$$

comme indiqué sur la figure ci-dessous. On voit que la lettre L a effectué une rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (ou sens trigonométrique).

On étudie l'effet de cette application linéaire sur un vecteur quelconque $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$:

$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_2\\x_1\end{bmatrix}.$$

Figure 2: Image de L par l'application T



On observe que les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $T\overrightarrow{x}$ ont la même longueur,

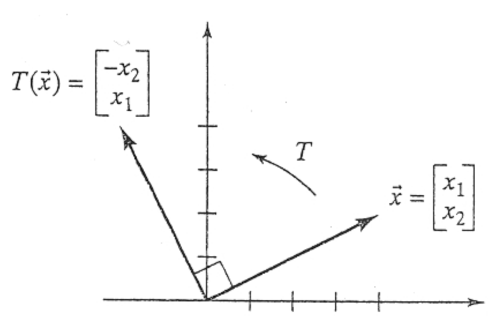
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(-x_2)^2 + x_1^2},$$

et que de plus, ils sont orthogonaux puisque leur produit scalaire est égal à 0,

$$\overrightarrow{x} \cdot T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = -x_1x_2 + x_2x_1 = 0.$$

En observant les signes des composantes, on remarque que lorsque que le vecteur $\overrightarrow{x}$ est dans le premier quadrant ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$), alors $T(\overrightarrow{x})$ est dans le deuxième quadrant ($x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$). On en déduit que $T(\overrightarrow{x})$ se déduit de $\overrightarrow{x}$ par une rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Figure 3: Rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une monde



Exemple 6

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ pour laquelle la matrice A est la matrice 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Déterminer les vecteurs

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Un calcul direct montre que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Il faut surtout noter que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est le premier vecteur colonne de la matrice A et que $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est le troisième vecteur colonne de la matrice A. On généralise cette remarque dans le résultat suivant.

Les colonnes de la matrice d'une application linéaire.

Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire, A sa matrice. On pose

$$\overrightarrow{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j^{\text{ème}}\text{ligne} \\ \\ \\ \end{array} \in \mathbb{R}^m.$$

Alors le j ème vecteur colonne de la matrice A est le vecteur $T(\overrightarrow{e}_j) \in \mathbb{R}^n$.

En d'autres termes, la matrice A peut être décrite comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\overrightarrow{e}_1) & T(\overrightarrow{e}_2) & \cdots & T(\overrightarrow{e}_m) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Pour justifier ce résultat, on écrit A sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Alors on a

$$A\overrightarrow{e}_j = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$0\overrightarrow{v}_1 + 0\overrightarrow{v}_2 + ... + 0\overrightarrow{v}_{j-1} + 1\overrightarrow{v}_j + ... + 0\overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{v}_j,$$

par définition du produit $A\overrightarrow{e}_j$, d'où le résultat.

La liste des vecteurs $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_1, ...,$ $\overrightarrow{e}_m$ est souvent appelée **la base canonique de $\mathbb{R}^m$**. On expliquera plus tard dans le cours la notion abstraite de "base" dans $\mathbb{R}^m$. Le terme "base" se justifie par le fait qu'un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$ de composantes $x_1, x_2, \cdots, x_m$ peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire des $\overrightarrow{e}_i$. En effet, on vérifie facilement que

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + x_m\overrightarrow{e}_m.$$

Dans le cas particulier de la "dimension" 3, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est souvent notée $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

Exemple 7

On considère une application linéaire

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \overrightarrow{x} \longrightarrow \overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}, \end{cases}$$

a. Quelle est la relation entre $T(\overrightarrow{v})$, $T(\overrightarrow{w})$ et $T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$, où $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^m$?

b. Quelle est la relation entre $T(\overrightarrow{v})$ et $T(k\overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur quelconque, et $k \in \mathbb{R}$ un scalaire quelconque ?

Solution.

a. En utilisant les règles de calculs décrites dans le chapitre 1, on a

$$T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = A(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = A\overrightarrow{v} + A\overrightarrow{w} = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w}).$$

En d'autre termes, l'image de la somme de deux vecteurs par une application linéaire est égale à la somme des images.

b. Toujours avec les mêmes règles de calcul,

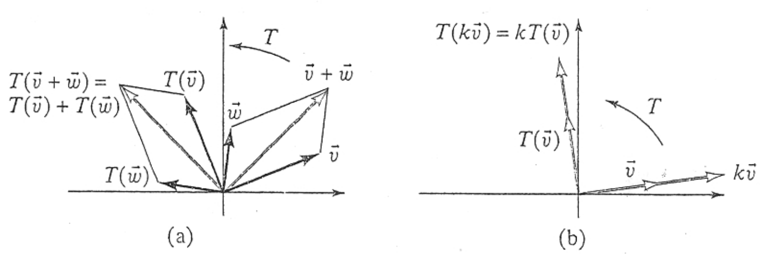
$$T(k\overrightarrow{v}) = A(k\overrightarrow{v}) = kA(\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v}).$$

En d'autres termes, l'image du produit d'un vecteur par un scalaire est égal au produit du même scalaire par l'image du vecteur considéré.

La figure suivante illustre cet exemple dans le cas de la rotation antihoraire d'angle 90° (voir exemple 5).

(b) illustre la propriété $T(k\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v})$.

Figure 4: (a) illustre la propriété $T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w})$
(b) illustre la propriété $T(k\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v})$.



Dans l'exemple 7, on a vu qu'une application linéaire satisfait

$$\begin{aligned}&\forall\, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m, \quad \forall\, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m, \quad \forall k \in \mathbb{R},\\ &T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w}), \quad T(k\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v}).\end{aligned}$$

Il se pose la question de savoir si la réciproque est vraie, à savoir : une application qui satisfait ces propriétés est-elle bien une application linéaire ?

Caractérisation des applications linéaires

Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application. L'application T est linéaire (i.e. il existe une matrice $n \times m$ A telle que pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$, $T(x) = A \cdot \overrightarrow{x}$) si et seulement si

a. $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m$, $\forall \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m$ on a $T(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w})$

b. $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m$, $\forall k \in \mathbb{R}$ on a $T(k\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v})$.

Démonstration

Dans l'exemple 7, on a vu qu'une application linéaire satisfait simultanément à **a** et **b**. Pour montrer la réciproque, considérons une application $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ qui satisfait **a** et **b** et montrons qu'elle est linéaire. Pour cela, nous devons prouver qu'il existe une matrice A de taille $n \times m$ telle que

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m, \quad T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}.$$

Soit $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ déjà introduite. On a alors

$$T(\overrightarrow{x}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = T(x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + x_m\overrightarrow{e}_m).$$

Or on a

$$T(\overrightarrow{x}) = T(x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + x_m\overrightarrow{e}_m) =$$

$$T(x_1\overrightarrow{e}_1) + T(x_2\overrightarrow{e}_2) + \cdots + T(x_m\overrightarrow{e}_m)$$

d'après la propriété **a**. En utilisant ensuite la propriété **b**, on obtient

$$T(\overrightarrow{x}) = x_1T(\overrightarrow{e}_1) + x_2T(\overrightarrow{e}_2) + \cdots + x_mT(\overrightarrow{e}_m).$$

Enfin en utilisant la définition du produit d'une matrice par un vecteur, on voit d'après ce qui précède que

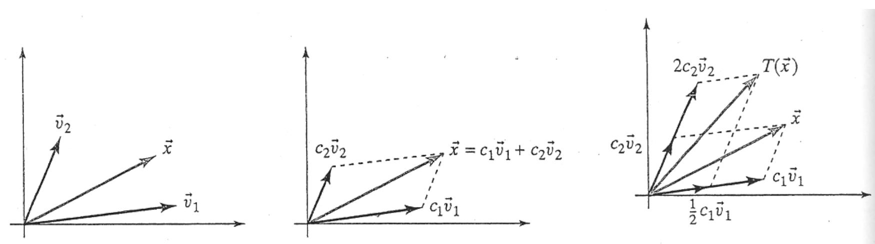
$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\overrightarrow{e}_1) & T(\overrightarrow{e}_2) & \cdots & T(\overrightarrow{e}_m) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A\overrightarrow{x},$$

ce qui achève la démonstration.

Exemple 8

On considère une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui vérifie $T(\overrightarrow{v}_1) = (1/2)\overrightarrow{v}_1$ et $T(\overrightarrow{v}_2) = 2\overrightarrow{v}_2$, où les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ sont comme sur la figure (a) ci dessous

Figure 5: (a) (b) (c)



Décrire sur les mêmes axes le vecteur $T(\overrightarrow{x})$ pour un vecteur $\overrightarrow{x}$ quelconque.

Solution.

En utilisant un paralèllogramme, on peut décomposer $\overrightarrow{x}$ comme étant une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ (voir figure (b)),

$$\overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{v}_1 + c_2\overrightarrow{v}_2.$$

La linéarité de T conduit à

$$T(\overrightarrow{x}) = T(c_1\overrightarrow{v}_1 + c_2\overrightarrow{v}_2) = c_1T(\overrightarrow{v}_1) + c_2T(\overrightarrow{v}_2) = \frac{1}{2}c_1\overrightarrow{v}_1 + 2c_2\overrightarrow{v}_2.$$

Le vecteur $c_1\overrightarrow{v}_1$ est diminué de moitié, $c_2\overrightarrow{v}_2$ est doublé (voir figure (c)).

Imagine que $\overrightarrow{x}$ se trouve sur une feuille de caoutchouc. La transformation T dilate cette feuille d'un facteur 2 dans le sens du vecteur $\overrightarrow{v}_2$ et la contracte d'un facteur 1/2 dans la direction de $\overrightarrow{v}_1$.