L1-AL1 — 08/09 — ALGÈBRE LINÉAIRE 1
Chapitre 1 : équations linéaires
Roger LEWANDOWSKI,
Marie-Françoise ROY,
Anton ZORICH

Extraits adaptés en français du livre d'Otto Bretscher, Linear Algebra with Applications, 3rd edition, Prentice Hall (2004).

1.3. Solution des systèmes linéaires, opérations sur les matrices

But de la section

- Discuter le nombre de solutions d'un système linéaire et définir le rang

- Présenter des règles de calcul sur les matrices et les vecteurs

Le nombre de solutions d'un système linéaire

Exemple 1

On considère trois systèmes dont les formes réduites échelonnées par ligne des matrices augmentées sont

$$\textbf{a.}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{b.}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{c.}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Quel est le nombre de solutions dans chaque cas ?

a. La troisième ligne représente l'équation $0 = 1$, donc il n'y a pas de solution. On dit que le système est *inconsistant*

b. La matrice représente le système

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & & = & 1 \\ & & & x_3 & = & 2 \end{array} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_2 \\ x_3 = 2 \end{array} \right|$$

la variable x_2 est libre, on peut lui attribuer la valeur arbitraire t, donc ce système admet une infinité de solutions

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{3-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ 2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

c Il n'y a pas de ligne représentant l'équation $0 = 1$, et il n'y a pas de variable libre, donc ce système admet une et une seule solution $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Nombre de solutions d'un système linéaire

On dit qu'un système est *consistant* si il a au moins une solution, il est dit *inconsistant* si il n'a aucune solution.

On note A la matrice des coefficiens du système et B sa matrice augmentée.
Un système linéaire est inconsistant si et seulement si frel(B) contient la ligne $\begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$, qui représente l'équation $0 = 1$.

Si un système linéaire est consistant, alors il a

- soit *exactement une solution*, quand frel(A) a un pivot par colonne
- soit *une infinité de solution*, quand une colonne de frel(A) ne contient pas de pivot, les variables correspondant à une colonne sans pivot sans appelées libres

Rang d'une matrice

Le *rang* d'une matrice A est le nombre de pivots dans la matrice frel(A), où frel(A) est la forme réduite échelonnée par ligne de la matrice A.

Exemple 2

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

alors

$$rang(A) = 2 \quad \text{car} \quad \text{frel}(A) = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il faut noter que l'on a défini le rang d'une matrice et non celui d'un système ! Pour l'étude des systèmes on considére parfois la matrice des coefficients et parfois la matrice augmentée.

Exemple 3

Soit un système de n équations linéaires avec m inconnues. La matrice des coefficients, notée A, de ce système est de taille $n \times m$. On note $(x_1, ..., x_m)$ les variables. On dit que x_k est une variable avec pivot si la $k^{\text{ième}}$ colonne de $\text{frel}(A)$ contient un pivot. La matrice augmentée du système, notée B, a n lignes et $m+1$ colonnes.

a. On a toujours $\text{rang}(A) \leq n$ et $\text{rang}(A) \leq m$.

b. Si $\text{rang}(A) = n$, alors le système est consistant

c. Si $\text{rang}(A) = m$, alors le système a au plus une solution

d. Si $\text{rang}(A) < m$, alors le système a soit une infinité de solutions soit aucune.

Démonstration

a. Par définition de la forme réduite échelonnée par ligne, il ne peut y avoir plus de pivot qu'il y a de lignes et de colonnes. Donc $\text{rang}(A) \leq n$ et $\text{rang}(A) \leq m$

b. On suppose que $\text{rang}(A) = n$. Alors chaque ligne de $\text{frel}(A)$ contient un pivot. Donc $\text{frel}(B)$ ne peut pas avoir la ligne $\left[\begin{array}{cccccc:c} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{array}\right]$. Par conséquent, le système est consistant.

Pour les point c. et d., si le système est consistant, on note que l'on a toujours

$$\left(\begin{array}{l}\text{nombre de}\\ \text{variables libres}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{nombre total}\\ \text{de variables}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{l}\text{nombre de}\\ \text{variables avec pivot}\end{array}\right) =$$

$$m - \text{rang}(A).$$

c. Si $\text{rang}(A) = m$, on distingue plusieurs cas.

- $n > m$ et on a une ligne $\left[\begin{array}{cccccc:c} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{array}\right]$ dans la forme réduite de la matrice augmentée. Dans ce cas le système est inconsistant,

- $n \geq m$ et les ligne i, pour $i > m$, sont de la forme $\left[\begin{array}{cccccc:c} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{array}\right]$, on a

$$\text{frel}(B) = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & \vdots & a_3 \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & \vdots & a_m \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right]$$

et le système admet une solution unique.

Notez qu'on ne peut pas avoir $n < m$, car dans ce cas $\text{rang}(A) \leq n < m$, ce qui contredit $\text{rang}(A) = m$.

d. Si $\text{rang}(A) < m$, alors soit le système est inconsistant (lors qu'une des lignes de $\text{frel}(B)$ représente $0 = 1$), soit il y a $m - \text{rang}(A) > 0$ variables libres, et dans ce cas, le système e a une infinité de solutions.

Exemple 4

Soit un système linéaire qui a moins d'équations que d'inconnues. Combien de solutions ce système peut-il avoir ?

Système avec moins d'équations que d'inconnues

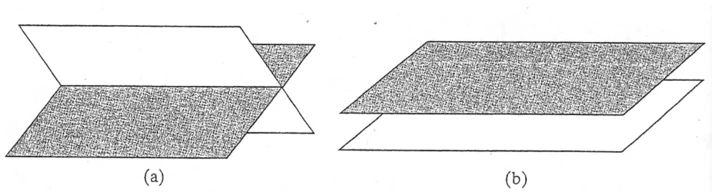
Un système qui a moins d'équations que d'inconnues a soit

- pas de solutions
- une infinité de solutions

Démonstration. On suppose que $n < m$, et soit A la matrice des coefficients du système. Alors, on sait d'après a. que $\text{rang}(A) \leq n < m$. Donc soit le système est inconsistant soit il y a $m - \text{rang}(A) > 0$ variables libres et on est dans le cas de d. plus haut.

A titre d'illustration, considérons un système de eux équations à trois inconnues. L'ensemble des soltutions est soit une droite (intersection de deux plans non parallèles) soit l'ensemble vide (cas de deux plans parallèles)

Figure 1: (a) deux plans qui s'intersectent en une droite, (b) deux plans parallèles



Exemple 5

Considèrons un système linéaire de n équations à n inconnues. Quand est-ce que ce système admet une unique solution ?

Système de n équations avec n inconnues

Un système linéaire de n équations avec n inconnues admet une uinque solution si et seulement si $\mathrm{rang}(A) = n$. Dans ce cas,

$$\mathrm{frel}(A) = \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice diagonale qui n'a que des 1 sur la diagonale (et des zéros partout ailleurs).

Démonstration.

On suppose d'abord que $\mathrm{rang}(A) = n$. Donc par définition, $\mathrm{frel}(A)$ a n pivots égaux à 1, ce qui implique que $\mathrm{frel}(A) = \mathrm{I}_n$. Alors la matrice augmentée du système admet pour forme réduite échelonné par ligne une matrice de la forme

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & a_1 \\
0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & a_2 \\
0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & \vdots & a_3 \\
. & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & \vdots & a_n
\end{array}\right],$$

ce qui fait que le système admet une solution unique.

Si à présent $\text{rang}(A) < n$, alors le système inconsistant ou a $n - \text{rang}(A) > 0$ variables libres, et donc il a donc soit aucune solution soit une infinité de solutions. Dans ce cas, le système n'a pas de solution unique.

Conclusion: lorsque $n = m$, le système a une solution unique si et seulement si $\text{rang}(A) = n$.

Calcul Matriciel

Somme de matrices

Soient $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ deux matrices de taille $n \times m$. La matrice $A + B$ est la matrice de taille $n \times m$ dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne est égal à $a_{ij} + b_{ij}$.

Autrement dit

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Soit encore :

Autrement dit :

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & . & . & . & a_{1m} \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
a_{n1} & . & . & . & a_{nm}
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
b_{11} & . & . & . & b_{1m} \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
b_{n1} & . & . & . & b_{nm}
\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & . & . & . & a_{1m}+b_{1m} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1}+b_{n1} & . & . & . & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = [a_{ij}]$ une matrices de taille $n \times m$ et k un nombre réel, aussi nommé scalaire dans ce contexte. La matrice kA est la matrice de taille $n \times m$ dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne est égal à ka_{ij}.

Autrement dit

$$kA = [ka_{ij}],$$

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1m} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & . & . & . & . & ka_{1m} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ ka_{n1} & . & . & . & . & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Exemple 6}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Exemple 7}}$

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

On a pour but de définir le produit de matrice, moins évident et direct. On commence par le produit d'une matrice de taille $n \times m$ par un vecteur à m composantes.

Le produit $A\overrightarrow{x}$

Soit A une matrice de taille $n \times m$ dont les vecteurs colonnes sont les m vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (*i.e.* ayant n composantes) notés $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_m$, et soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$ dont les composantes sont notées $x_1, ..., x_m$. Alors le produit $A\overrightarrow{x}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\begin{bmatrix} \\ \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & . & . & . & . & \overrightarrow{v}_m \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + ... + x_m\overrightarrow{v}_m$$

Il faut noter que le produit est bien défini seulement si le nombre de colonnes de la matrice A coincide avec le nombre de composantes du vecteur $\overrightarrow{x}$.

Exemple 8

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Exemple 9

Le produit

$$A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas défini car le nombre de colonnes de la matrice n'est pas égal au nombre de composante du vecteur $\overrightarrow{x}$.

Exemple 10

On considère la matrice identité 3×3,

$$\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le produit $\mathrm{I}_3\overrightarrow{x}$.

Par définition,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{x}$$

Donc pour chaque vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{I}_3\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$. C'est la raison de la terminologie "matrice identité".

Notre définition du produit matriciel fait intervenir l'expression

$$x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + ... + x_m\overrightarrow{v}_m,$$

où les x_i sont des "scalaires" et les $\overrightarrow{v}_i$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. de telles expressions sont très fréquentes en algèbre, et portent un nom.

Combinaisons linéaires

On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ...\overrightarrow{v}_m$, tous dans $\mathbb{R}^n$, si il existe des scalaire (*i.e*des nombres réels) $x_1, ..., x_m$ tels que

$$\overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + ... + x_m\overrightarrow{v}_m$$

En particulier, le produit $A\overrightarrow{x}$ est la combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A avec pour scalaires correspondants les coefficients de $\overrightarrow{x}$,

$$A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & . & . & . & . & \overrightarrow{v}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + ... + x_m\overrightarrow{v}_m$$

Dans le travail théorique, il est souvent utile de définir le produit $A\overrightarrow{x}$ comme la combinaison linéaire $x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + ... + x_m\overrightarrow{v}_m$. De même, on pourra être conduit à considérer la combinaison linéaire $x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + ... + x_m\overrightarrow{v}_m$ en introduisant la matrice

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & . & . & . & . & \overrightarrow{v}_m \end{bmatrix} \quad \text{et le vecteur} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$$

et écrire $x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + ... + x_m\overrightarrow{v}_m = A\overrightarrow{x}$

Le produit matrice vecteur va être très utile pour l'étude des systèmes linéaires, comme le montre l'exemple suivant.

$\boxed{\text{Exemple 11}}$

Soit le système

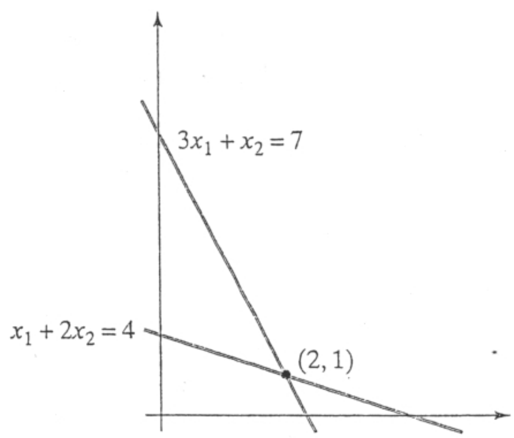
$$\left| \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array} \right|$$

qui admet pour matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système peut être vue comme l'intersection de deux droites dans le plan x_1, x_2, comme cela est illustré dans la figure suivante

Figure 2: Représentation de la solution du système



On peut également écrire le système sous la forme vectorielle

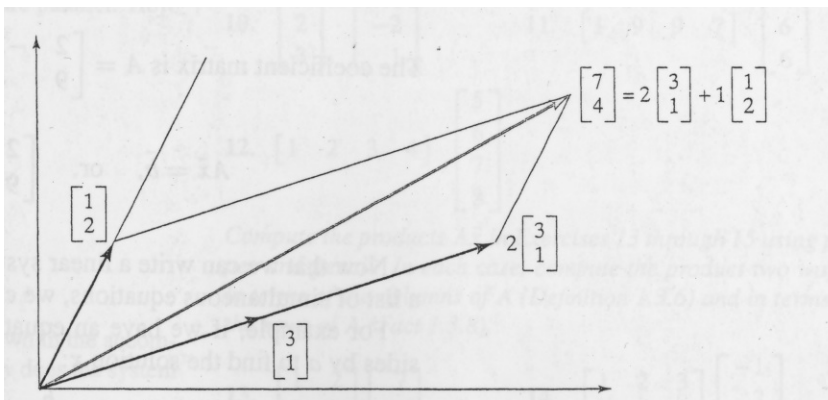
$$\begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

ce qui peut encore s'écrire en terme de combinaisons linéaires sous la forme

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

et la solution peut s'interpréter comme définir le vecteur $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ à l'aide de deux vecteurs paralèles aux vecteurs $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en formant un paralèllogramme, comme le montre la figure suivante,

Figure 3: Représentation de la solution par un paralèllogramme



On peut écrire, en utilisant la définition du produit d'un vecteur par une matrice,

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

ce qui fait que notre système linéaire peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

soit encore en posant

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Et sa matrice augmentée se met sous la forme

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & \overrightarrow{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Forme matricielle d'un système linéaire

Soit un système linéaire ayant pour matrice augmentée $\left[\begin{array}{c} A\overrightarrow{b} \end{array}\right]$. Alors ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

En effet, la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur $A\overrightarrow{x}$ est $a_{i1}x_1 + ...a_{im}x_m$, en utilisant les notations habituelles. Donc la $i^{\text{ième}}$ composante de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est $a_{i1}x_1 + ...a_{im}x_m = b_i$, ce qui correspond bien à la $i^{\text{ième}}$ équation du système qui a $\left[\begin{array}{c} A\overrightarrow{b} \end{array}\right]$ pour matrice augmentée.

Exemple 12

Le système

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 8 \end{array}\right|$$

a pour matrice des coefficients et second membre

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix},$$

et se met sous la forme $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Remarquons que l'on a travaillé avec les colonnes de la matrice dans la définition du produit matrice vecteur. On peut aussi travailler avec les lignes. Pour cela on commence par définir le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne.

Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne

Soient $\underrightarrow{\ell}$ un vecteur ligne à m composantes et $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$, de composantes $\ell_1, ..., \ell_m$ et $x_1, ..., x_m$ respectivement. Alors $\underrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}$ est le nombre défini par

$$\underrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & . & . & . & \ell_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + ... + \ell_m x_m.$$

Exemple 13

Revenons à l'exemple 8, ou on a calculé le produit $A\overrightarrow{x}$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et

$$A\overrightarrow{x} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

On considère les vecteurs lignes de la matrice A,

$$\underrightarrow{\ell}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underrightarrow{\ell}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Alors la première composante du vecteur $A\overrightarrow{x}$ est le produit $\underrightarrow{\ell}_1 \cdot \overrightarrow{x}$,

$$\underrightarrow{\ell}_1 \cdot \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = 1$$

tandis que la deuxième composante est le produit

$$\underrightarrow{\ell}_2 \cdot \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 11$$

Le produit $A\overrightarrow{x}$ à l'aide des lignes

Soit A une matrice de taille $n \times m$ avec $\underrightarrow{\ell}_1, ..., \underrightarrow{\ell}_n$ pour vecteurs lignes et soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$. Alors on a

$$A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} \underrightarrow{\ell}_1 \cdot \overrightarrow{x} \\ \underrightarrow{\ell}_2 \cdot \overrightarrow{x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underrightarrow{\ell}_n \cdot \overrightarrow{x} \end{bmatrix}.$$

Démonstration

On note a_{ij} les coefficients de la matrice A et on désigne par $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_m$ ses vecteurs colonnes, $\underset{\rightarrow}{\ell}_1, ..., \underset{\rightarrow}{\ell}_n$ ses vecteurs lignes. On remarque tout d'abord que pour j entre 1 et m, les composantes du vecteur $\overrightarrow{v}_j$ sont $a_{1j}, ..., a_{nj}$ et pour i entre 1 et n, les composantes du vecteur $\underset{\rightarrow}{\ell}_i$ sont $a_{i1}, a_{i2}..., a_{im}$. En particulier la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\overrightarrow{v}_j$ est a_{ij}.

Par définition, on a

$$i^{\text{ième}}\text{composante de } A\overrightarrow{x} = i^{\text{ième}}\text{composante de } (x_1\overrightarrow{v}_1+x_2\overrightarrow{v}_2+...+x_m\overrightarrow{v}_m)$$
$$= x_1(i^{\text{ième}}\text{composante de } \overrightarrow{v}_1] + ... + x_m(i^{\text{ième}}\text{composante de } \overrightarrow{v}_m] =$$
$$x_1a_{i1} + x_2a_{i2} + ... + x_ma_{im} = \underset{\rightarrow}{\ell}_i \cdot \overrightarrow{x},$$

d'où le résultat annoncé.

$\boxed{\text{Exemple 14}}$

$$A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 2\cdot(-8) + 2\cdot 4 \\ 1\cdot 4 + 2\cdot(-8) + 3\cdot 4 \\ 4\cdot 4 + 5\cdot(-8) + 6\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il faut remarquer le fait important que le produit de A par $\overrightarrow{x}$ peut être nul, même lorsque ni A ni $\overrightarrow{x}$ le sont (ce qui n'arrive jamais avec des nombres réels, où le produit de deux réels non nuls n'est jamais nul). En terme de système linéaire, il existe des systèmes linéaires homogènes ayant des solutions non toutes nulles.

Règles algébriques pour le calcul de $A\overrightarrow{x}$

Soit A une matrice de taille $n \times m$, $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^m$ deux vecteurs, $k \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors on a

a. $A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y}$,

b. $A(k\overrightarrow{x}) = k(A\overrightarrow{x})$

Démonstration. On désigne par $\underset{\rightarrow}{\ell}_i$ la $i^{\text{ième}}$ ligne de A. On a alors

$$i^{\text{ième}}\text{composante de } A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \underset{\rightarrow}{\ell}_i \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \underset{\rightarrow}{\ell}_i \cdot \overrightarrow{x} + \underset{\rightarrow}{\ell}_i \cdot \overrightarrow{y} =$$
$$i^{\text{ième}}\text{composante de } A\overrightarrow{x} + i^{\text{ième}}\text{composante de } A\overrightarrow{y} =$$
$$i^{\text{ième}}\text{composante de } (A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y}),$$

d'où le résultat. Le point b. est laissé en exercice.