# 1 3.4. COORDONNÉES

Les coordonnées constituent ”la grande idée” des mathématiques. On attribue à René Descartes (1596-1650) de les avoir introduites dans un appendice de son traité ”*Discours de la méthode*”(Leyde, 1637). On dit que l'idée lui serait venue, alors qu'il était couché sur le dos dans son lit un dimanche matin à regarder une mouche voler au plafond. Il lui apparu qu'il pourrait décrire la position de la mouche en donnant sa distance par rapport à deux murs.

Pierre de Fermat (1601-1665) aurait développé les mêmes principes de géométrie analytique indépendamment au même moment, mais n'aurait pas publié ses travaux sur ce sujet.

On a utilisé des coordonnées cartésiennes dans le plan $x, y$ et dans l'espace $x, y, z$ dans les chapitres et sections précédents, sans trop insister sur la notion, pour représenter des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.

Dans cette section 3.4, on développe cette notion de façon systématique.

Exemple 1

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

et considérons le plan $vect(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ dans $\mathbb{R}^3$. Est-ce que le vecteur

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

appartient à $V$ ? Visualiser la réponse.

**Solution**. On se demande s'il existe deux scalaires $c_1$ et $c_2$ tels que $\overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{v}_1 + c_2\overrightarrow{v}_2$. Cela revient à considérer le système linéaire qui a pour matrice augmentée

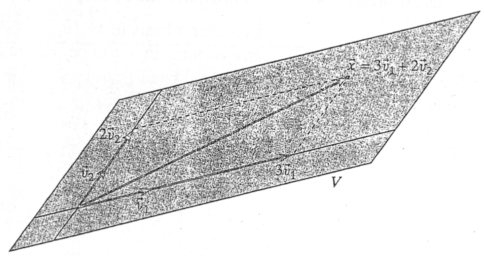
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 27 \\ 1 & 39 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \text{Frel}(M) = \begin{bmatrix} 1 & 03 \\ 0 & 12 \\ 0 & 00 \end{bmatrix}.$$

Ce système est donc consistant et admet pour unique solution $c_1 = 3$ et $c_2 = 2$ de sorte que

$$\overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{v}_1 + c_2\overrightarrow{v}_2 = 3\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2.$$

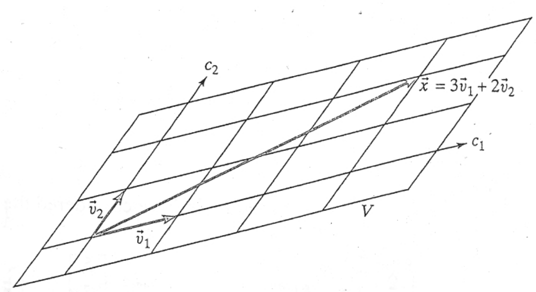
On a représenté géométriquement cette solution dans la figure 1, et il apparait clairement que $\overrightarrow{x}$ est bien dans le plan $V$.

Figure 1: 1




Pour visualiser les coefficients 2 et 3 dans la combinaison linéaire $\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2$, il est commode d'introduire une **grille de coordonnées** dont les axes, notés $c_1$ et $c_2$, pointent dans les directions des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$, comme sur la figure 2.

Figure 2: 2




Le **vecteur coordonnée** de $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2$ dans ce système de coordonnées est

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

On peut imaginer que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ est "l'adresse" de $\overrightarrow{x}$ dans le système de coordonnées $c_1, c_2$. En introduisant ce système de coordonnées, on a identifié

$V$ à $\mathbb{R}^2$. Il ne faut pas s'inquiéter du fait que les axes $c_1$ et $c_2$ ne soient pas perpendiculaires : les coordonnées cartésiennes ont un sens également dans le cas d'axes obliques.

Le système de notation suivante est pratique, bien qu'un peu lourd. On note $\mathcal{B}$ la base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ et $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ le vecteur coordonnée de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Si

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + c_2 \overrightarrow{v}_2 = 3\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2,$$

alors

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

On généralise l'idée introduite dans l'exemple 1 comme suit.

**Définition 1.1 Coordonnées dans un sous-espace de $\mathbb{R}^n$**

*Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$ une base d'un sous-espace vectoriel $V$ de $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{x} \in V$. Le vecteur $\overrightarrow{x}$ peut sécrire de façon unique sous la forme*

$$\overrightarrow{x} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m \overrightarrow{v}_m.$$

*les scalaires $c_1, \cdots, c_m$ sont appelées les $\mathcal{B}$-coordonnées de $\overrightarrow{x}$, et le vecteur*

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

*est le $\mathcal{B}$-vecteur coordonnées de $\overrightarrow{x}$ noté $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$.*

En particulier

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

veut dire

$$\overrightarrow{x} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m \overrightarrow{v}_m.$$

On notera que l'on a la relation matricielle

$$\overrightarrow{x} = P \cdot [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m \end{bmatrix},$$

$P$ étant une matrice de taille $n \times m$.

L'équation $\overrightarrow{x} = P \cdot [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ résulte directement de la définition des coordonnées.

Dans l'exemple 1, nous avons considéré le cas

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{x} = P[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{ou encore} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte une propriété importante de linéarité.

**Linéarité des coordonnées**

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Alors on a :

(a) $\forall \overrightarrow{x} \in V, \forall \overrightarrow{y} \in V,$ $\quad [\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} + [\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}},$

(b) $\forall \overrightarrow{x} \in V, \forall k \in \mathbb{R},$ $\quad [k\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = k[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$

On démontre le point (b). Le point (a) fait l'objet de l'exercice 51. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$ une base de $V$,

$$\overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m\overrightarrow{v}_m = \sum_{j=1}^{m} c_j\overrightarrow{v}_j \in V.$$

Alors

$$k\overrightarrow{x} = kc_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + kc_m\overrightarrow{v}_m = \sum_{j=1}^{m} kc_j\overrightarrow{v}_j,$$

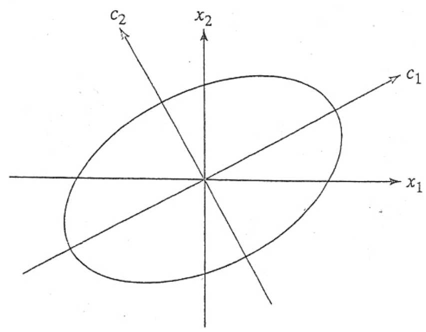
de sorte que

$$[k\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} kc_1 \\ \vdots \\ kc_m \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = k[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}},$$

comme annoncé.

Considérons la définition des coordonnées dans le cas particulier où $V = \mathbb{R}^n$. Il est souvent très utile de travailler avec d'autres bases que la base canonique $\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_n$. Par exemple, si on veut étudier l'ellipse de la figure 3, on voit que les axes $c_1 - c_2$ alignés avec les axes principaux de l'ellipse sont préférables aux axes standards $x_1, x_2$.

Figure 3: 3




$\boxed{\text{Exemple 2}}$

Considérons la base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$, où $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a. Soit $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$. Trouver $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$.

b. Soit $\overrightarrow{y}$ tel que $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Déterminer $\overrightarrow{y}$.

a. Pour trouver les $\mathcal{B}$-coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x}$, on écrit $\overrightarrow{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base,

$$\overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{v}_1 + c_2\overrightarrow{v}_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ce système admet pour solution $c_1 = 4$, $c_2 = 2$ de sorte que $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Une autre méthode consiste à utiliser l'équation $\overrightarrow{x} = P[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ autrement dit $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\overrightarrow{x}$, c'est-à-dire

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \overrightarrow{x} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b. Par définition, $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ se traduit par

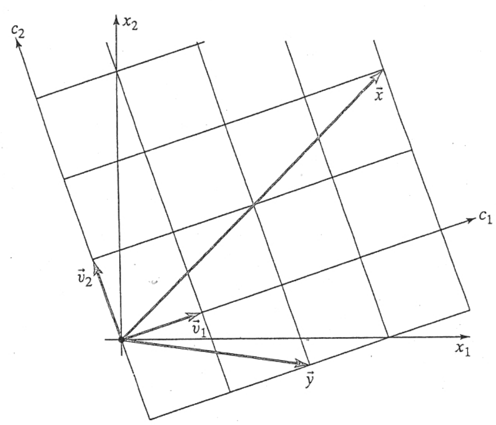
$$\overrightarrow{y} = 2\overrightarrow{v}_1 + (-1)\overrightarrow{v}_2 = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Autrement, on peut aussi directement utiliser la formule

$$\overrightarrow{y} = P[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ces résultats sont illustrés sur la figure 4 :

Figure 4: 4




Exemple 3

Soit $L \subset \mathbb{R}^2$ la droite engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit $T$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui projette chaque vecteur $\overrightarrow{x}$ orthogonalement sur la droite $L$.

On peut faciliter l'étude de $T$ en introduisant un système de coordonnées dans lequel $L$ serait un des axes (par exemple l'axe $c_1$) avec pour axe $c_2$ l'axe othogonal à $L$. Suivant ce système de coordonnées, $T$ transforme $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Figure 5: 5

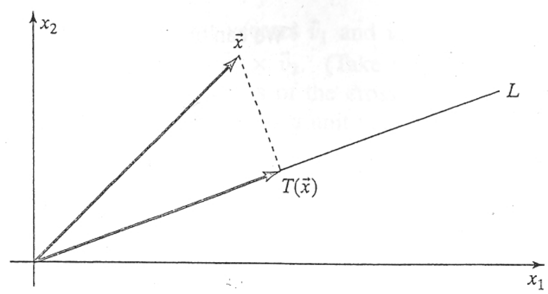
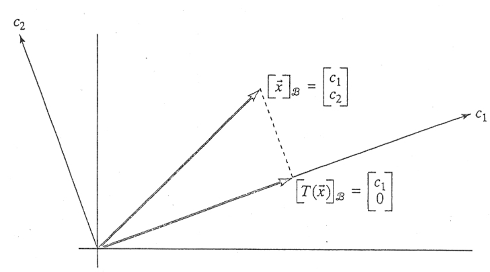



Figure 6: 5



Dans le système de coordonnées $c_1, c_2$, $T$ est représenté par la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

car

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Précisions cela. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ telle que $\overrightarrow{v}_1$ est parallèle à la droite $L$ et $\overrightarrow{v}_1$ est parallèle à la droite $L^\perp$. Par exemple $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Si $\overrightarrow{x} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + c_2 \overrightarrow{v}_2$, alors $T(\overrightarrow{x}) = \text{Proj}_L(\overrightarrow{x}) = c_1 \overrightarrow{v}_1$, ou encore

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \text{alors} \quad [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

comme indiqué sur la figure 6.

La matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui transforme $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ en $[T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est "**la matrice de $T$ relativement à la base $\mathcal{B}$**" (ou aussi $\mathcal{B}$-matrice de $T$) dans le sens où

$$[T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = B[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$$

On peut représenter le travail sous forme d'un diagramme comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{x} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + c_2 \overrightarrow{v}_2 & \xrightarrow{T} & T(\overrightarrow{x}) = c_1 \overrightarrow{v}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} & \xrightarrow[B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}]{} & [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

**Définition 1.2 Matrice d'une application linéaire**

*Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application lin'eaire et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice carrée $B$ d'ordre $n$ qui transforme $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ en $[T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}}$ est la matrice de $T$ relativement à la base $\mathcal{B}$,*

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n, \quad [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = B[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$$

*La matrice $B$ est construite en colonnes de la manière suivante, en notant $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_n)$,*

$$B = \begin{bmatrix} \\ [T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Il faut vérifier que les colonnes de $B$ sont bien les vecteurs $[T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}}$. Soit $\overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_n\overrightarrow{v}_n$. Comme $T$ est linéaire, on a

$$T(\overrightarrow{x}) = c_1 T(\overrightarrow{v}_1) + \cdots c_n T(\overrightarrow{v}_n)$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} &= c_1[T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} + \cdots c_n[T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}} \\ & \begin{bmatrix} \\ [T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}} \\ \\ \end{bmatrix} [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = B[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

On peut utiliser cette méthode pour construire $B$, bien qu'il soit souvent plus simple d'utiliser un diagramme comme on l'a fait dans l'exemple 3.

**Exemple 4**

On revient au cas de l'exemple 3. Soit $L \subset \mathbb{R}^2$ la droite engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit $T$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui projète chaque vecteur $\overrightarrow{x}$ orthogonalement sur la droite $L$. Dans cet exemple, on avait vu que la matrice de $T$ relativement à la base

$$\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

était la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $A$ la matrice "standard" de $T$ telle qu'on l'a définie dans les sections précédentes, à savoir la matrice qui vérifie

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}.$$

On remarque qu'avec avec cette nouvelle définition, la matrice $A$ est la matrice de $T$ relativement à la base canonique $\mathcal{U} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

**Quelle est la relation entre les matrices $A$ et $B$ ?**

**Solution**

On rappelle que l'on a par définition

$$\overrightarrow{x} = P[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}, \quad \text{où} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{x} & \xrightarrow{A} & T(\overrightarrow{x}) \\ \uparrow \text{P} & & \uparrow \text{P} \\ [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{B} & [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

On note que puisque

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}, [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = B[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$$

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = AP[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}},$$

$$T(\overrightarrow{x}) = P[T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = PB[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$$

pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Par conséquent

$$AP = PB, \quad B = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PBP^{-1}.$$

On dit que

$$\underline{P \text{ est la matrice de passage de la base } \mathcal{U} \text{ à la base } \mathcal{B},}$$

($P$ comme "passage") et la formule est connue sous la forme

$$\boxed{PB = AP, \quad B = P^{-1}AP}$$

On peut utiliser cette formule pour trouver la matrice $A$,

$$A = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

**Généralisation-synthèse**

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $B$ la matrice de $T$ relativement à la base $\mathcal{B}$, et $A$ la matrice de $T$ relativement à la base canonique $\mathcal{U} = (\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$. Enfin soit

$$P = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \cdots & \overrightarrow{v}_n \end{bmatrix}$$

la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{B}$. Alors

$$AP = PB, \quad B = P^{-1}AP, \quad A = PBP^{-1}.$$

Ce qui précède motive la definition suivante :

**Définition 1.3** *Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$. On dit qu'elles sont <u>semblables</u> si il existe une matrice $P$ <u>inversible</u> telle que*

$$AP = PB \quad \textit{ou bien de manière équivalente} \quad B = P^{-1}AP.$$

En clair, deux matrices sont semblables si elles représentent la même application linéaire mais dans des bases différentes.

Exemple 5

Est-ce que les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sont semblables ?

**Solution**

On cherche s'il existe une matrice inversible $P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ telle que l'on ait $AP = PB$. Cette dernière relation s'écrit composante par composante sous la forme

$$\begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x & -y \\ 5z & -t \end{bmatrix},$$

ce qui fournit un système qui se réduit à

$$z = 2x, \quad t = -y,$$

de sorte que n'importe quelle matrice de la forme

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ 2x & -y \end{bmatrix}$$

vérfie $AP = PB$. Cependant, pour répondre a la question posée, il faut vérifier que parmis ces matrices, certaines sont inversibles. Or on a $\det(P) = -3xy$. Donc $P$ est inversible si et seulement si $xy \neq 0$, et par exemple en prenant $x = y = 1$, on voit que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

est inversible et vérifie $AP = PB$. Par conséquent, les matrices $A$ et $B$ sont semblables.

Exemple 6

Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ semblables. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors les matrices $A^k$ et $B^k$ sont semblables.

**Solution**.

On rappelle que

$$A^k = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{k \text{ fois}}, \quad B^k = \underbrace{B \times B \cdots \times B}_{k \text{ fois}}.$$

Comme $A$ et $B$ sont semblables, il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Par conséquent

$$B^k = \underbrace{(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) \cdots \times (P^{-1}AP)}_{k \text{ fois}}.$$

Or, en utilisant l'associativité de la multiplication des matrices, on a la relation

$$(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) = (P^{-1}A) \times (PP^{-1}) \times (AP).$$

Puisque $PP^{-1} = I_n$, on en déduit que

$$(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P.$$

Donc

$$B^k = \underbrace{(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) \cdots \times (P^{-1}AP)}_{k \text{ fois}}.$$

conduit de proche en proche à la relation

$$B^k = P^{-1}A^kP,$$

ce qui prouve bien que les matrices $A^k$ et $B^k$ sont semblables. ■

Comme toujours, $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensembles des matrices carrées d'ordre $n$.

**La relation "$A$ et $B$ sont semblables" est une relation d'équivalence**

a. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors la matrice $A$ est semblable à elle-même (*reflexivité*).

b. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Si $B$ est semblable à $A$ alors $A$ est semblable à $B$ (*symétrie*).

c. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ et $C \in M_n(\mathbb{R})$. Si $A$ est semblable à $B$ et $B$ est semblable à $C$, alors $A$ est semblable à $C$ (*transitivité*).

On démontre la transitivité, laissant la symétrie et la reflexivité en exercice. On sait qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ et $Q \in M_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que

$$AP = PB \quad \text{et} \quad BQ = QC.$$

En multipliant à droite par $Q$ la première égalité, on obtient $APQ = PBQ$. Puis comme $BQ = QC$, on en déduit que $A(PQ) = (PQ)C$. Comme $P$ et $Q$ sont inversibles, on en déduit que le produit $PQ$ est inversible, ce qui fait que les matrices $A$ et $C$ sont semblables. ■

# Fin