Sur L'Homologie des Variétés Algébriques Réelles

RENÉ THOM

Résumé

On montre, à l'aide de la théorie de Morse sur les variétés à bord, que si A est l'ensemble des zéros dans $\mathbf{R}^n$ d'un polynôme de degré p, alors la somme des nombres de Betti de A est majorée par $(p)^n$; on donne une borne analogue pour les ensembles algébriques réels projectifs.

Soit A un ensemble algébrique réel *affine*; c'est, par définition, l'ensemble des points de l'espace euclidien de dimension n, $\mathbf{R}^n$, dont les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérifient un système fini d'équations polynomiales à coefficients réels:

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Il est bien connu que tout ensemble algébrique réel tel que A peut se définir à l'aide d'une seule équation, par exemple:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{où } G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_i P_i^2(x_1, x, \ldots, x_n).$$

On ne considérera par la suite que des ensembles A définis par une seule équation $G = 0$; pour éviter toute redite, on adoptera la convention suivante: quand on dira que l'ensemble A est défini par l'équation $G = 0$, *on supposera que le polynôme G est positif*, ou, si G peut changer de signe, *que l'ensemble défini par $G = 0$ est une hypersurface régulière sans singularités.*

Avec cette convention, on se propose d'établir le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit A l'ensemble algébrique de $\mathbf{R}^n$ défini par une équation $G(x_i) = 0$, où le polynôme G est de degré p. Alors la somme des nombres de Betti de A (pris par rapport au corps $\mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{R}$ comme coefficients) est majorée par*: (p^n).

En raison du caractère localement compact et localement contractile de tout ensemble algébrique réel, il est indifférent de préciser la théorie de l'homologie utilisée; on pourra admettre, par exemble, qu'il s'agit de l'homologie singulière.

On établira le théorème 1 d'abord dans le cas où A est compact; deux lemmes nous seront nécessaires, ainsi qu'une propriété due à Lojasiewcz.

LEMME 1. *Soit K un ensemble algébrique compact de $\mathbf{R}^n$ défini par l'équation $F = 0$; il existe un nombre positif a tel que K soit rétracte par déformation d'une ou plusieurs composantes connexes compactes de la variété à bord définie par $F \leq a$.*

Soit (C) l'ensembles des points critiques du polynôme F (ensemble des zéros de la différentielle dF); C est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{R}^n$; par suite, en raison du théorème de Seidenberg-Tarski [1], l'image $F(C)$ est un ensemble "semi-algébrique," c'est-à-dire un ensemble défini à l'aide d'inéquations et d'équations polynomiales; un tel ensemble, sur la droite réelle $\mathbf{R}$, ne comprend que des points isolés et des intervalles, éventuellement fermés ou semi-fermés; or, d'après le théorème d'A. P. Morse sur l'ensemble des valeurs singulières d'une fonction différentiable, l'ensemble $F(C)$ ne peut comporter aucun intervalle, et se compose seulement de points isolés. Dans ces conditions, il existe un nombre a positif tel que dans $[-a, +a]$, il n'existe aucune valeur critique de F, sauf éventuellement zéro. Alors le système d'équations $F = \pm a$ définit une hypersurface (H) de $\mathbf{R}^n$, qui divise l'espace $\mathbf{R}^n$ en un certain nombre de composantes connexes (V_j); je dis que, si a est assez petit, celles des V_j qui contiennent des points de K sont relativement compactes dans R^n. Soit en effet, d un nombre positif; on sait [2]—c'est l'inégalité de Lojasiewicz—que, pour d assez petit, en tout point situé à la distance euclidienne d de K, on a l'inégalité $|F| > d^\alpha$, α exposant positif; soit dés lors U l'ensemble compact des points situés à une distance de K inférieure à d; si l'on prend $a < d^\alpha$, tout point du bord ∂U est séparé de K par l'hypersurface (H); les composantes connexes (V_j) contenant K sont donc toutes contenues dans U, ce qui montre qu'elles sont relativement compactes.

Si l'on forme les trajectoires du champ grad F, on sait, également d'après Lojasiewicz, qu'elles permettent de définir une rétraction par déformation des (V_j) sur K [3]. Ceci achève par suite la démonstration du Lemme 1.

Disons, pour abréger, qu'une fonction u est *correcte* sur une hypersurface (H) d'équation $F = a$, si la fonction u ne présente sur (H) que des points critiques quadratiques non dégénérés. Alors, on a le:

LEMME 2. *Soit $u = \Sigma x_i^2$, et F un polynôme tel que l'équation $F = a$ définisse une hypersurface sans singularités; étant donné un compact $K \subset \mathbf{R}^n$, le polynôme F peut être approché par un polynôme G* de même degré, *tel que l'équation $G = a$ définisse dans un voisinage de K une hypersurface sans singularités sur laquelle la fonction (u) est correcte dans K.*

Ceci se démontre par un argument standard de transversalité, que nous reproduisons intégralement ci-dessous. Les points critiques de (u) sur l'hypersurface $F^{-1}(a)$ sont donnés par le système:

$$\text{(S)} \qquad F = a \qquad \frac{x_1}{F_{x_1}} = \frac{x_2}{F_{x_2}} = \cdots = \frac{x_i}{F_{x_i}} = \cdots = \frac{x_n}{F_{x_n}}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que, sur le compact K considéré, l'une au moins des fonctions coordonnées (x_i) ne s'annule pas sur K: ceci suppose seulement que l'origine 0 n'est pas dans K; on pourra alors subdiviser K en compacts K_i sur lesquels (x_i) ne s'annule pas.

On peut alors écrire, sur K_1, le système (S) sous la forme:

$$F = a \qquad H_i(F) = F_{x_i} - \frac{x_i}{x_l} F_{x_l} = 0, \qquad i = 2, 3 \cdots n.$$

Dire qu'un point critique de u sur $F^{-1}(a)$ est non dégénéré, équivaut à dire que les hypersurfaces $H_i(F) = 0$ et $F^{-1}(a)$ se coupent transversalement en ce point.

Posons alors $G = F - \Sigma_j c_j x_j$, $j = 2, 3, \ldots, n$; les points critiques de (u) sur $G^{-1}(a)$ sont donnés par le système:

$$G = a; \; H_i(G) = H_i(F) - c_i = 0.$$

Considérons l'application auxiliaire $H: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ définie par:

$$c_j = H_j(F), j = 2, 2, \ldots, n.$$

Soit $(c_j = m_j)$ une valeur régulière de l'application H restreinte à l'hypersurface $F^{-1}(a)$; c'est dire qu' en tout point de $F^{-1}(a) \cap H^{-1}(m)$, la $(n-1)$ forme induite par (H): $H^* (dc_2 \wedge \cdots \wedge dc_n)$ n'est pas nulle dans $F^{-1}(a) \cap K_1$.

Or, si l'on fait $c_j = m_j$, l'application $H(G)$ ne diffère de l'application $H(F)$ que par une translation constante; par suite, en tout point de $H(F)^{-1}(m_j) = H(G)^{-1}(0)$, la $(n-1)$ forme $H^* (dc_2 \wedge \cdots \wedge dc_n)$ est non-nulle sur $F^{-1}(a)$, donc aussi sur $G^{-1}(a) \cap K_1$, pourvu que les coefficients (m_j) soient pris assez petits; il en résulte que les hypersurfaces $H_i(G) = 0$ et $G = a$ se coupent transversalement dans K_1; c'est dire que la fonction u est correcte dans: $G^{-1}(a) \cap K_1$.

Théorie de Morse pour les variétés à bord [4]

Soit M^{n+1} une variété à bord compacte, de bord $W = \partial M^{n+1}$; soit f une fonction "correcte" sur M^{n+1}: les points critiques de f sur l'intérieur de M, ainsi que ceux de la restriction de f au bord W de M sont quadratiques non dégénérés; désignons par i_k le nombre des points critiques de type k

dans l'intérieur de M, par j_k le nombre des points critiques de la restriction de f à W, tels que le gradient soit *rentrant* dans M, alors on a l'inégalité:

$$i_k + j_k \geqq b_k(M^{n+1}).$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction f n'est autre que $u = x_i^2$, et la variété à bord est le voisinage de K constitué des V_j. En ce cas, si l'origine 0 est prise extérieure aux V_j, u n'a aucun point critique dans l'intérieur des $V_j(i_k = 0)$; il suffira donc de compter le nombre des points critiques de la restriction de u au bord de V_j; dans ce but, on remplace le polynôme F par un polynôme G tel que u soit correcte sur $G^{-1}(a) \cap K$, et que, par ailleurs, dans le voisinage U de K, les hypersurfaces $F = a$, $G = a$ soient isotopes: on sait, en effet, que cette condition est réalisée dés que G est assez voisin de F dans la C^1 topologie. Dans cette situation, le nombre total des points critiques de (u) sur $G = a$ est majoré par le nombre total des solutions du système (S):

$$G = a, \; x_1/G_{x_1} = x_2/G_{x_2} = \cdot \cdot \cdot = x_n/G_{x_n}.$$

Il y a donc en tout (n) équations de degré (p), et, par suite, d'après le théorème de Bezout, au plus $(p)^n$ solutions. Ceci établit donc le théorème 1 dans le cas où K est compact et F est un polynôme positif.

Remarque. On pourrait même observer que parmi les points critiques de u sur $G^{-1}(a) \cap K_1$, il en est certainement un au moins à gradient sortant, à savoir le maximum de u sur cette hypersurface; on pourrait donc, en ce cas, diminuer la borne d'une unité.

Dans le cas où le polynôme F prend des signes opposés, mais où néanmoins $F^{-1}(0)$ est une hypersurface W compacte sans singularitiés, on observe que les équations $F = \pm$ a définissent deux hypersurfaces isotopes à W, pour a assez petit; la fonction u présente sur ces hypersurfaces des points critiques qui se répartissent par couples, l'un à gradient rentrant, l'autre à gradient sortant; il en résulte qu'on obtient une majoration de $\Sigma_k j_k$ en prenant $(p)^n$, où p est le degré de F.

Toujours dans le cas où l'ensemble algébrique K est compact, il est possible toutefois d'obtenir une majoration un peu meilleure; soit K défini par le polynôme F positif, de degré p; on désignera par U le voisinage de K limité par des composantes de $F^{-1}(a)$. Remplaçons alors le polynôme F par un polynôme G voisin de F tel que la variété de niveau $G^{-1}(a)$ présente des composantes connexes isotopes à celles qui forment ∂U; le nouveau voisinage U_1 contenant K et limité par $G = a$, est de ce fait homéomorphe à U; de plus, on peut supposer que les points critiques du polynôme G sont génériques; comme ils sont définis par le système:

$$G_{x_1} = G_{x_2} = \cdot \cdot \cdot = G_{x_n} = 0,$$

il y en a au plus $(p-1)^n$, dont une fraction seulement sera contenue dans U_1; il en résulte bien que la somme des nombres de Betti de U_1, donc de K, est majorée par $(p-1)^n$. On a donc le:

THÉORÈME 2'. *Si K est un ensemble algébrique affine compact, défini par l'équation $F = 0$ où F est un polynôme* positif *de degré p, alors*:

$$\Sigma b_j(k) \leq (p-1)^n$$

REMARQUE. Supposons de plus que le polynôme positif F soit une fonction *propre* sur $\mathbf{R}^n$; alors les hypersurfaces de niveau $F = m$, pour m grand, limitent un système fondamental de voisinages du point à l'infini de $\mathbf{R}^n$; ce sont donc des sphères d'homotopie; comme, par la dualité d'Alexander-Pontrjagin, on a:

$$b_j(K) = b_{n-j-1}(\mathbf{R}^n - U),$$

il en résulte que la somme $\Sigma b_j(K)$ est également majorée par le nombre des points critiques de F augmenté d'une unité tenant compte de la valeur $F = \infty$ obtenu au point infini de $\mathbf{R}^n$). Dans le cas donc où F est positif et *propre*, on a la majoration plus fine:

$$\Sigma b_j(K) \leq 1 + (p-1)^n. \tag{2}$$

De manière plus générale, supposons que l'ensemble algébrique A de $\mathbf{R}^n$ soit une variété compacte sans singularités, définie par le système d'équations:

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0,$$

où les polynômes f_j sont de degré r; supposons de plus qu'en tout point de a, les vecteurs grad f_j engendrent le fibré normal à A; posons alors $g = \Sigma f_j^2$, et appliquons la théorie précédente à la variété à bord $g \leq a$. Ici, encore on constate que les points critiques de la fonction u se répartissent par couples (gradient entrant, gradient sortant) chaque couple étant associé à un point critique de (u) sur la variété A. Dans ces conditions on peut affirmer:

THÉORÈME 2. *La somme des nombres de Betti de la variété compacte A est majorée par*: $(2r)^{n-1}/2$.

REMARQUE. Si l'on définit, comme Chern-Lashof [5], la courbure totale de l'ensemble $A = F^{-1}(0)$ comme la courbure de Gauss des hypersurfaces $F = a$, pour a petit, alors il est clair que toutes les majorations obtenues plus haut pour la somme des nombres de Betti de A sont également valables pour la courbure totale de ces ensembles.

Le théorème 1 étant ainsi établi pour A compact, il reste à examiner le cas où A est non compact; le lemme suivant permet de se ramener au cas compact.

LEMME 3. *Soit A un ensemble algébrique réel affine, B_r la boule de centre 0 de rayon r; il existe une valeur r_0 de r, telle que A admet pour rétracte par déformation, l'intersection $A \cap B_{r_0}$.*

La démonstration de ce lemme fait appel à des propriétés topologiques des ensembles algébriques réels, qui n'ont pas encore été établies dans la littérature; on trouvera dans [6] un exposé préliminaire des propriétés utilisées, que nous rappelons brièvement ci-dessous:

On sait que tout ensemble algébrique réel A peut-être décomposé en une réunion de variétés plongées (Manifold Collection), que nous appellerons les *strates* de A. Cette décomposition, mise en évidence par H. Whitney dans [7], admet un raffinement ayant les propriétés suivantes (dites d'incidence régulière):

(1) La frontière de toute strate U de (A) est réunion finie de strates de dimension inférieure.

(2) Appelons étoile d'une strate (U) la réunion finie des strates V telles que la frontière de V contient U; alors toute application f: $\mathbf{R}^k \Rightarrow \mathbf{R}^n$ transversale sur la strate U est également transversale sur les strates de l'étoile de U au voisinage de U.

(3) De manière plus précise: à toute strate U on peut associer une fonction polynomiale par morceaux φ_u, nulle sur U, positive à l'extérieur de U, telle que la différentielle $d\varphi_u$ soit non nulle dans les strates de l'étoile de U, au voisinage de U, alors toute application f: $\mathbf{R}^k \Rightarrow \mathbf{R}^n$ transversale sur U est transversale aux hypersurfaces de niveau de la fonction φ_u dans l'intersection d'une strate V de l'étoile et d'un voisinage de U.

Ceci étant admis, supposons qu'on ait muni l'ensemble A d'une "stratification" ayant les propriétés ci-dessus; appelons valeur critique de la fonction $u = r^2$:

(1°) Les valeurs de u aux points qui sont strates de dimension zéro de A; il n'y en a qu'un nombre fini.

(2°) Les valeurs critiques de la restriction de u aux différentes strates de A; ici encore, il n'y en a qu'un nombre fini, car on peut reprendre mot pour mot ce qui a été dit de l'ensemble des valeurs singulières d'un polynôme sur une variété algébrique au début de la démonstration du Lemme 1. Dans ces conditions, on prendra pour valeur r_0 une valeur plus grande que toutes les valeurs critiques de $\sqrt{u}$ sur A.

On construit alors un champ de vecteurs Y, qui, dans chaque strate U coïncide avec le gradient de la restriction de (u) à (U), sauf dans un voisinage du bord de (U); la construction de (Y) se fait par induction sur la dimension des strates; sur les strates de dimension un, le champ Y est tangent à la strate; supposant (Y) construit sur les strates de dimension $<p$, soit (U^p) une strate de dimension p; on construit dans un voisinage de bord ∂U de U une fonction φ_u, nulle sur ∂U, de différentielle non nulle dans ce voisinage; on prolonge Y de ∂U à U comme suit: soit x un point de U, y le point de U où aboutit la trajectoire du champ grad φ_u dans U sur une strate de ∂U; si la fonction est analytique, alors l'application $x \Rightarrow y$ est continue; on prendra pour valeur de Y en x la projection orthogonale du vecteur $Y(y)$ sur le plan tangent à la variété de niveau de la fonction $\varphi_u = (y)$; puis on prolongera Y à l'intérieur de (U) de telle manière que le champ reste transverse aux hypersurfaces $u = c^{\text{ste}}$, dans les sens u (ou r) croissant; c'est possible, car en chaque point, l'espace de ces directions transverses est contractile.

Intégrons alors le champ Y ainsi construit: sur chaque strate (u), (Y) est différentiable (et globalement continu); il y a donc existence et unicité locale de la trajectoire du champ (Y) en tout point de A où $\{ \varphi_r > r_0$, et le groupe à un paramètre ainsi défini, permet de rétracter A sur $A \cap B_{r_0}$ par déformation continue le long des trajectoires de (Y).

Pour achever dés lors la démonstration du théorème 1 dans le cas non compact, il suffit de remarquer que $A \cap B_{r_0}$ est également rétracte par déformation de l'ensemble compact $F^{-1}(a) \cap B_{r_0}$; on utilise dans ce but les trajectoires du champ grad F légèrement modifié au voisinage du bord de la boule B_{r_0} de manière à admettre la sphère B_{r_0} comme variété invariante: ou encore, on pourrait modifier la métrique de manière que la sphère $S = \partial B_{r_0}$ coupe orthogonalement les strates de A. Alors la démonstration s'achève comme dans le cas compact.

Remarque. Ici encore, si l'on observe que les ensembles A et $\mathbf{R}^n - A$ ont même somme pour leurs nombres de Betti, et que $\Sigma b_j(R^n - A)$ est majoré par le nombre des points critiques de u à gradient sortant, on en déduit: $2\Sigma b_j(A) < 1 + p^n$, comme au théorème $2'$.

Ensembles algébriques réels projectifs

Soit A un ensemble algébrique de l'espace projectif $P_n(\mathbf{R})$; soit $B = A \cap H$ une section hyperplane; la suite exacte de cohomologie donne:

$$\text{(S)} \qquad \rightarrow H^{r-1}(A) \rightarrow H^{r-1}(B) \xrightarrow{\delta} H^r(A, B) \rightarrow H^r(A) \rightarrow.$$

La cohomologie relative s'identifie, ainsi qu'il est bien connu, à la cohomologie à support compacts du complémentaire affine

$$A - B \colon H^r(A, B) \simeq H^r_k(A - B).$$

Désignons, comme au Lemme 3, par A_1 l'intersection $A - B \cap B_{r_0}$, et par C l'intersection de $A - B$ avec la sphère-bord S de la boule B_{r_0}; alors l'espace différence $A_1 - C$ est homéomorphe à $A - B$ (homéomorphisme réalisé grâce au groupe à un paramètre défini par le champ (Y) du Lemme 3, et par suite tout revient à calculer la cohomologie relative $H(A_1, 0)$; or, la paire d'espaces (A_1, C) est rétracte par déformation de la paire $(F^{-1}[0, a] \cap B_{r_0}, F^{-1}[0, a] \cap S_{r_0})$; on aura donc à calculer, pour la variété à bord $F^{-1}[0, a]$, la cohomologie relative de l'ensemble $u \leq r_0^2$ modulo la variété de niveau $u = r_0^2$.

Il reste donc à étudier, dans la théorie de Morse pour les variétés à bord, comment varie la cohomologie relative $H^*(f \leq b, f = b)$ lorsqu'on franchit un point critique de la fonction f sur le bord, or une étude locale montre immédiatement ce qui suit:

Lorsqu'on franchit un point critique de (f) d'indice k, à *gradient entrant*, l'effet homotopique de la transformation équivaut à l'adjonction d'une k-cellule à la fois à $f \leq b$ et à $f = b$; il en résulte que la cohomologie relative $H^*(f \leq b, f = b)$ ne varie pas; en effet, soit c la valeur critique associée:

Par déformation descendante le long des trajectoires de grad f, le couple $[f \leq c + \varepsilon, f = c + \varepsilon]$ peut se déformer en le couple $[(f \leq c - \varepsilon) \cup B_k, (f = c - \varepsilon) \cap B_k]$, et la cohomologie relative ne dépend que de l'espace différence, soit $f < c - \varepsilon$; par suite

$$H^*(f < c + \varepsilon, f = c + \varepsilon) \simeq H^*(f \leq c - \varepsilon, f = c - \varepsilon).$$

Par contre, si l'on franchit un point critique d'indice k du bord à *gradient sortant*, il n'y a aucun effet sur la cohomologie $H^*(f \leq b)$ alors que la cohomologie de $f = b$ est modifiée; plus précisément, le long des trajectoires de grad f, la paire $(f \leq c + \varepsilon, f = c + \varepsilon)$ est rétractée par déformation sur la paire: $(f \leq c - \varepsilon) \cup D_{k+1}$, $(f = c - \varepsilon) \cup b_k$, où b_k est l'hémisphère supérieur bord de la demi-boule D_{k+1}; il en résulte que l'espace différence $f < c + \varepsilon$ diffère de $f < c - \varepsilon$ par l'adjonction d'une $(k + 1)$-boule ouverte; ceci entraîne un saut d'une unité décroissant pour le $k^{\text{ème}}$, ou croissant pour le $(k + 1)^{\text{éme}}$ nombre de Betti relatif. Il en résulte finalement que la cohomologie relative $H^*(A, B)$ a sa somme des nombres de Betti majorée par $(p)^n$, si p est le degré du polynôme F. On pourrait même (pour F positif) abaisser cette majoration d'une unité, puisque il existe certainement un point critique (le minimum) où le gradient de (u) est entrant.

Pour obtenir finalement une majoration de $\Sigma_k b_k(A)$, il y a lieu de calculer une borne supérieure du nombre des points présentés par l'intersection de (A) avec un plan de dimension complémentaire. On peut prendre dans ce but le degré algébrique de la variété (A), soit (d). Si le degré (d) n'est pas connu (car, semble-t-il, il n'existe pas de procédure explicite permettant de le déterminer à partir des équations de (A)) on obtiendra une majoration en considérant le nombre des points singuliers de la variété $F = 0$ dans le plan de section, de dimension $(n - r)$, où r est la dimension de A; on doit alors résoudre le système:

$$F_{x_1} = F_{x_2} = \cdots = F_{x_{n-r}},$$

système qui admet au plus $(p - 1)^{n-r}$ solutions "génériques."

Finalement on obtient la majoration suivante:

THÉORÈME 3. *Soit A un ensemble algébrique de dimension $r \leq n - 2$ défini dans l'espace projectif $P_n(\mathbf{R})$ par une équation $F = 0$, où F est une polynôme homogène* positif *de degré p; alors la somme des nombres de Betti est majorée par:*

$$(p - 1)^{n-r} + (p)^{n-r+1} + \cdots + (p)^{n-r}.$$

Si d est le degré algébrique de la variété (A), cette borne peut s'écrire, sous les mêmes hypothèses:

$$d + (p)^{n-r+1} + \cdots + (p)^{n-r}.$$

Dans le cas où l'ensemble (A) est une *variété sans singularités*, on peut faire usage de la majoration, du théorème 2 ce qui conduit à:

$$d + 1/2[(p)^{n-r+1} + \cdots + (p)^{n-1}].$$

Enfin, dans le cas où A est une hypersurface partout régulière, définie par une équation $G = 0$ de degré p dans $P_n(R)$, alors on obtient la borne:

$$p + p^2 + \cdots (p)^n = p \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Dans le cas de l'hyperplan projectif $(p = 1)$, cette majoration est effectivement atteinte.

Il y a intérêt à comparer les bornes ainsi obtenues avec celles données par O. A. Oleinik dans [8]; dans le cas, seul considéré par cet auteur, des variétés projectives sans singularités, les majorations obtenues sont incontestablement bien meilleures que celles données au théoreme 3.

Une toute autre méthode, pour obtenir une majoration de $\Sigma b_j\ (A)$, consiste à considérer l'ensemble réel A comme ensemble des points fixes de l'involution induite dans la variété complexifiée C par la transformation $(z_i) \rightarrow (\bar{z}_i)$ de l'espace projectif complexe $P_n(\mathbf{C})$; il résulte en effet de la théorie de Smith, comme l'a montré A. Borel dans [9], que, si l'on prend l'homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$, on a la majoration:

$$\Sigma b_j(A) \leq \Sigma b_j(C).$$

Or, si la variété (C) est une hypersurface (ou plus généralement une intersection régulière complète d'hypersurfaces), l'homologie de (C) est connue: elle est sans torsion, et nulle en dimensions (réelles) impaires, sauf peut-être pour la dimension moitié; de même, le $(2k)^{\text{ème}}$ nombre de Betti (pour tout corps de coefficient) vaut un, sauf éventuellement celui de dimension moitié.

Désignons par $H(p)$ l'hypersurface régulière de degré p dans $P_n(\mathbf{C})$; sa caractéristique d'Euler-Poincaré $E(H(p))$ peut-être calculée par exemple à l'aide du théorème de dualité des classes de Chern; elle vaut:

$$E(H(p)) = 1/p \cdot [(1-p)^{n+1} - 1 + p(n+1)].$$

On en déduit, que, pour n impair, H de dimension complexe paire:

$$\sum b_j(H(p)) = E(H(p));$$

pour n pair:

$$\sum_j b_j(H(p)) = 2n - E(H(p)).$$

D'où les majorations correspondantes pour les variétés réelles régulières A de degré p dans $P_n(\mathbf{R})$.

On peut adapter la méthode précédente au cas où l'ensemble A est affine compact; supposons A défini dans R^n par l'équation $F = 0$, où F est positif de degré p. Alors si U désigne comme précédemment le voisinage de A limité par $F^{-1}(a)$, alors on a:

$$b_i(K) = b_{n-i}(U, \partial U),$$

par la dualité des variétés à bord; mais la somme $\Sigma b_j(U, \partial U)$ est majorée par la somme $\Sigma b_j(P_n(\mathbf{R}), F^{-1}(a))$, en utilisant la compactification projective de $\mathbf{R}^n$. D'après le résultat cité ci-dessus, la somme $\Sigma b_j(P_n(\mathbf{R}), F^{-1}(a))$ est majorée par la somme analogue pour les complexifiés, soit:

$$\Sigma b_j(P_n(\mathbf{C}), H(p)).$$

Or cette somme vaut:

$E(H(p)) - n$ pour n impair, et $n - E(H(p))$ pour n pair.

Finalement, on obtient le:

THÉORÈME 4. *Pour tout compact K de $\mathbf{R}^n$, défini par l'équation $F = 0$, où F est un polynôme positif de degré p, la somme des nombres de Betti mod 2 de K est majorée par:*

$$|(1/p) \cdot [(1-p)^{n+1} - 1 + p(n+1)] - n|.$$

On observera que cette majoration est asymptotique (pour p croîssant) aux majorations des théorèmes 1 et 2; elle est plus fine pour les petites valeurs de p.

On obtient donc finalement à peu près la même majoration pour un ensemble algébrique affine que pour une variété projective; par suite, si l'on considère les sections planes $A \cap P_k$ de dimensions décroissantes, on peut penser que l'homomorphisme d'injection

$$j: H_*(A \cap P_k) \rightarrow H_*(A \cap P_{k+1})$$

a la propriété approximative que voici: le rang total du noyau de j est voisin de la moitié du rang total de $H_*(A \cap P_k)$. C'est dans cette direction, semble-t-il, qu'on doit rechercher la généralisation en géométrie algébrique réelle du théorème classique de Lefschetz reliant l'homologie d'une variété algébrique complexe projective à celle de sa section hyperplane.

STRASBOURG

RÉFÉRENCES

[1] A. SEIDENBERG, A new decision method for elementary algebra, *Ann. of Math.*, (*2*), *60* (1954), p. 365–374.

[2] S. LOJASIEWICZ, Sur le problème de la division, *Studia Math.*, *18* (1959).

[3] ———, Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels, *Colloque Internat. C.N.R.S.*, Paris, Juin 1962.

[4] M. MORSE and E. BAIADA, Homotopy and homology related to the Schoenflies problem, *Ann. of Math.*, *58* (1953), p. 142–165.

[5] S. CHERN and R. LASHOF, Total curvature of immersed manifolds, *Michigan Math. Journal*, *5* (1958), p. 5–12.

[6] R. THOM, La stabilité topologique des applications polynomiales, *L'Enseignement Math*, VIII fasc. 2, (1962).

[7] H. WHITNEY, Elementary structure of real algebraic varieties, *Ann. of Math.*, *66* (1957), p. 545–56.

[8] O. A. OLEINIK, Estimates of the Betti numbers of real algebraic hypersurfaces—Mat. Sbornik—N. S. 28 (70), 1951, p. 635–640.

[9] A. BOREL, ET AL., *Seminar on Transformation Groups*. Annals of Mathematics Studies, No. 46, Princeton University Press, 1960.

Added in proof: Un article de J. MILNOR: On the Betti numbers of real varieties, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *15* (1964), p. 275–280, parut pendant l'impression de ce livre, traite du même sujet, avec des résultats souvent meilleurs.