GdT Immeubles de Tits

25/04/17

1

M. Romagny : Groupes réductifs

Rappel :

Thm (de pt fixe de Borel) : si $k = \bar{k}$ et G = k-gpe alg. résoluble connexe agit sur une var. proj. connexe X $\Rightarrow$ G fixe un point.

Cor (Lie-Kolchin) : $k = \bar{k}$; si $G \to GL(V)$ avec G rés. connexe $\Rightarrow$ G laisse invariant un drapeau (complet)

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V.$$

Dem : $G \curvearrowright \mathcal{F}(V)$ = var. des drapeaux complets

$$\mathcal{F}(V) \to Gr(1, V) \times \dots \times Gr(n-1, V)$$

immersion fermée $\square$

Conséquence : on en déduit que si $k = \bar{k}$, tout groupe rés. connexe est produit semi-direct $G = U \rtimes T$

U = unipotent $\quad T$ = tore

↳ unique $\quad$ ↳ unique à conj. près

(Moralement on trigonalise)

Rem : $k = \mathbb{R}$ $\quad S^1$ n'est pas trigonalisable

10. Radicaux ; groupes semi-simples et réductifs

G = k-gpe algébrique ($k = \bar{k}$ ou non)

Fait : $\exists!$ sous-gpe résoluble distingué connexe maximal (DCM) dans G et un unique sous-gpe unip. DCM

Le premier est appelé radical de G $\quad R(G)$

second radical unip. $\quad R_u(G)$

En effet : les gr. résolubles sont stables par sous-gpe, quotient, extension (donc image aussi).

Si $R_1, R_2 \overset{c}{<} G$ sont deux ~~gpes~~ sous-gpes résolubles distingués, alors

$$R_1R_2 = \mathrm{im}\left(R_1 \rtimes R_2 \longrightarrow G\right)$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1x_2$$

est résoluble.

Donc un ss-gpe résoluble de dim. max est maximal m̂ argument pour unipotent.

<u>Déf</u> : G connexe est ~~sans~~ <u>semi-simple</u> si $R(G) = 1$

<u>réductif</u> si $R_u(G) = 1$

<u>Ex</u> : SL_n est semi-simple (sur $k = \bar{k}$) $\qquad SL_n \hookrightarrow GL_n$

Soit $R \subset SL_n$ rés. conn. distingué

~~Lie-Kolchin~~ Opsq $k = \bar{k}$; Lie-Kolchin $\Rightarrow$ R est trigonalisable supérieur par un élément g de SL_n (quitte à mult. g par $\sqrt[n]{\frac{1}{\det g}}$)

R distingué $\Rightarrow$ R triangulaire sup. } R diagonal
Même arg $\Rightarrow$ R triangulaire inf.

Si $\exists\, g \in R$ avec deux coeffs ~~de~~ distincts $\Rightarrow$ une matrice unip. la conjugue hors de la diagonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ R est composé d'homothéties, de facteur une racine n-ième de 1 $\underset{\text{connexe}}{\Longrightarrow}$ $R = 1$.

L'argument montre que ~~R~~ $R(GL_n) =$ homothéties

Ex : $n \geq 1$ GL_n est réductif avec $R(G) \simeq \mathbb{G}_m$

Exercice : le radical d'un gpe réductif (connexe) est un tore central

[Écrire $R(G) = U \rtimes T$; mq $U = 1$; faire agire G sur T par conjug. ; rigidité des tores $\Rightarrow$ action triviale]

On voit que tout gpe algébrique connexe est extension de : fini, unipotent ; tore ; semi-simple.

$$1 \to G^\circ \to G \to \text{fini} \to 1$$

$$1 \to R_u(G^\circ) \to G^\circ \to G_1 \to 1 \qquad G_1 \text{ réductif}$$

$$1 \to \underset{T}{\underset{\shortparallel}{R(G_1)}} \to G_1 \to \underset{\hookrightarrow \text{ semi-simple}}{G_2} \to 1$$

11. Sous-groupes de Borel et paraboliques

[Déf : G alg. connexe
rang semi-simple de G = dimension max. d'un tore de $G/R(G)$ $\to$ toujours semi-simple
rang réductif = dim. max. d'un tore dans $G/R_u(G)$ (ou dans G)

Ex : GL_n rang ss $= n-1$
rang réd. $= n$

]

Déf : G : k-gr. alg. connexe. Un sous-gpe de Borel de G est un ss-gpe alg. résoluble ~~conn~~ connexe maximal. (non néc. distingué).

Ex : le Borel standard de GL_n $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

Thm (conjug. des Borels, $k = \bar{k}$) : Si B est un Borel, alors tous les Borels sont conj. à B et G/B est une var. proj.

Preuve : R = un Borel de dim. max. de G.

par 6 — On peut choisir une rep. lin. V de G tq R est le stab. d'une droite $V_1 \subset V$.

Lie - Kolchin appliqué à $V/V_1 \Rightarrow R$ laisse inv. un drapeau complet $\mathcal{D} = (0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V)$

Ainsi $R \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \in R \Rightarrow R = \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$

Donc G/R s'identifie à l'orbite de $\mathcal{D}$ dans la var. de drapeaux $\mathcal{F}(V)$

$\mathrm{Stab}(\mathcal{D}')$ toujours résoluble $\forall \mathcal{D}' \in \mathcal{F}(V)$

$\dim(R)$ maximale $\Rightarrow$ orbite G/R de dim minimale parmi les orbites

$\Rightarrow G/R \subset \mathcal{F}(V)$ fermé $\Rightarrow G/R$ proj.

Le gpe B agissant sur G/R par $b(gR) = bgR$ possède un point fixe (thm de Borel) $\Rightarrow$ $\exists g \in G$ tq $B \cdot gR \in gR \Rightarrow B \subset gRg^{-1} \Rightarrow B = gRg^{-1}$ par maximalité

$\square$

$k = \bar{k}$;

Déf : Un ss-gpe alg. connexe $P \subset G$ est <u>parabolique</u> s'il contient un Borel

Rq : revient au même de demontrer que G/P soit projective

$\boxed{\Rightarrow}$ si $P \supset B$, $G/B \twoheadrightarrow G/P$ morph. de var. alg q.-proj, G/B proj $\Rightarrow G/P$ proj.

$\boxed{\Leftarrow}$ $B \curvearrowright G/P \underset{\text{thm de pt fixe}}{\Rightarrow} P \supset gBg^{-1}$ pour un g.

Rq : un thm de Chevalley dit que les paraboliques sont connexes et égaux à leurs normalisateurs

Thm (sur "la variété des Borels") : $k = \bar{k}$, G connexe ; soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des Borels de G et $B_0 \in \mathcal{B}$. Alors $G \curvearrowright \mathcal{B}$ induit une bij. $G/B_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ qui munit $\mathcal{B}$ d'une structure de var. proj. lisse connexe

12. Tores maximaux, groupe de Weyl

G connexe, $k = \bar{k}$

Déf : un tore maximal de G est un tore qui est max.

Thm : Les tores maximaux de G sont conjugués.

Esquisse : tout tore est inclus dans un Borel, qui est résoluble donc $B \simeq U \rtimes T$

On conclut avec 1) le cas G résoluble (pas si facile)

2) conjug. des Borels $\square$

Thm (de réductivité des centralisateurs de tores) : G réductif connexe, $T \subset G$ tore. Alors le centralisateur $Z_G(T) < G$ est un groupe réductif connexe, et l'inclusion $T \hookrightarrow Z_G(T)$ est un iso ssi T maximal.

Rq sur la preuve : le point clé est de montrer que $R(Z(T)) = R(G) \cap Z(T)$

Ex : $G = GL_n \supset D_n = \{\text{matrices diagonales}\}$ tore maximal (car il l'est pour le Borel standard)

$T \subset D_n$ un tore

Supp. T de codim 1 dans D_n

Si $g = (g_{ij}) \in \mathcal{Z}(T) \Rightarrow \forall\, t = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix} \in T$ on a

$c_i c_j^{-1} g_{ij} = g_{ij}$

Supp. qu'une racine $\alpha = \alpha_{rs}$ s'annule sur T ; $\alpha(t) = 1$

$\forall t \in T$, on voit que les matrices $g = Id + E_{rs}$, $g' = Id + E_{sr}$ centralisent T

$\Rightarrow T \subset \ker(\alpha)$ est une égalité par dim. $= \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

$\mathcal{Z}(T) = \langle D_n, I_n + E_{rs}, I_n + E_{sr} \rangle \cong GL_2 \times D_{n-2}$

Soit $N(T)$ = norm. d'un tore $T \subset G$, $N(T) \curvearrowright T$ par conj.
Par rigidité des tores, $N(T)^\circ$ (comp. neutre) agit trivialement.
Donc $N(T)^\circ = \mathcal{Z}(T)$

Déf : Le gpe de Weyl de T est $W(T) = N(T)/\mathcal{Z}(T) = N(T)/N^\circ(T)$

Rq : c'est un gpe fini.

Si T maximal $\Rightarrow \mathcal{Z}(T) = T \Rightarrow W \curvearrowright T$ fidèlement