Groupes de Coxeter

28.02.17
L. Marquis

1). C'est quoi?

Un <u>système de Coxeter</u> est une paire (S, M) où

S = ens. fini

M = mat. symétrique de taille $S \times S$

avec $M_{ss} = 1$ et $M_{s,t} \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$

le <u>groupe de Coxeter</u> associé est $W = W_S = W_{(S,M)}$:

$$W = \left\langle S \;\middle|\; s^2 = 1 \ \forall s \in S \text{ et } (st)^{M_{st}} = 1 \ \forall s \neq t \text{ si } M_{st} < \infty \right\rangle$$

(pas de relation sinon)

<u>Rem</u> $M_{st} = 2 \Rightarrow st = ts$

$M_{st} = 3 \Rightarrow sts = tst$

$M_{st} = 4 \Rightarrow stst = tsts$

le <u>graphe de Coxeter</u> a pour

sommets : les éléments de S

arêtes : une arête $s \overset{}{\underset{M_{st}}{\text{———}}} t$ si $M_{st} \neq 2$ et $s \neq t$

avec "étiquette" ou "poids" $= M_{st}$

et on ne note pas les M_{st} lorsque $= 3$.

Si $T \subset S$, on note

$W_T = W_{(T, M_{|T})}$

$\underline{W}_T$ = le sous-groupe de W engendré par T.

Il y a un morphisme naturel $W_T \to \underline{W}_T$ qui est un iso ; on le verra plus loin.
Ce fait implique que les $\Rightarrow$ de la Rem ci-dessus sont en fait des $\Leftrightarrow$.

<u>Rem</u> 1) si $W = W_S$ avec $S = S_1 \amalg S_2$ et aucune arête entre S_1 et S_2 (situation disconnexe), alors

$$W_S = W_{S_1} \times W_{S_2}.$$

2) Si le graphe est connexe on dit que W est <u>irréductible</u>.

3) Si $S = S_1 \amalg S_2$ et $\forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ le graphe contient une arête $s_1 \overset{\infty}{—} s_2$ alors $W_S = W_{S_1} * W_{S_2}$

<u>2) Premier objet associé</u>

La <u>longueur</u> d'un élément $w \in W$ pour le système de générateurs S notée $l(w)$ est ce qu'on pense.
La <u>signature</u> d'un élément de W est la parité de la longueur : $\varepsilon : W \to \{\pm 1\}$ mor. de groupes tq $\varepsilon(s) = -1 \quad \forall s \in S$.

<u>Csq</u> $\forall s \in S, \forall w \in W, \begin{cases} l(sw) = l(w) \pm 1 \\ l(ws) = l(w) \pm 1 \end{cases}$

<u>Rem</u> l'existence de la signature vient du fait que les relations qui définissent W_S sont de lg <u>paire</u>

Les $\underline{W}_T$ pour TCS sont appelés ss-gr <u>spéciaux</u> ou <u>standard</u> de W.

Les <u>cosets spéciaux</u> sont les $w\underline{W}_T$

Le <u>poset des cosets spéciaux</u> (ens. ordonné des classes à gauche) est $\Sigma = \{\text{ens. des cosets spéciaux}\}$

$$= \{ w\underline{W}_T \mid w \in W,\ T \subsetneq S \}$$

$T = \emptyset$ inclus

On définit l'ordre sur Σ par :

$A \leq B$ ssi $B \subset A$ en tant que sous-ens. de W.

3) Exemples

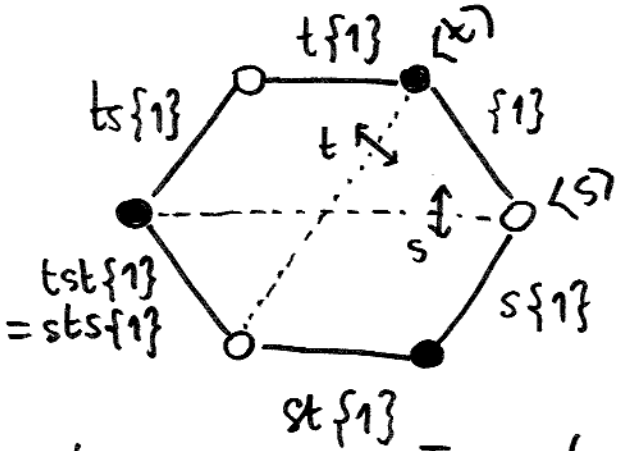
1) card $S = 1$ $\quad S = \{\sigma\}$

graphe : σ $\qquad$ poset Σ : 2 pts discrets

$\bullet\ \sigma\{1\}$

$\bullet\ \{1\}$

2) card $S = 2$ $\quad s \overset{m}{—} t$ avec $m < \infty$



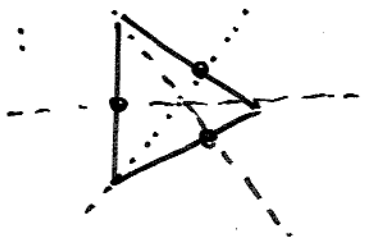
1 orbite d'arêtes

2 orbites de sommets

— est dom. fond. strict

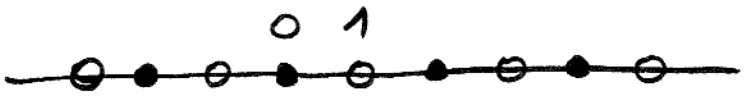
On note que $\mathbb{D}_m = \mathrm{Isom}(m\text{-gone})$ $\quad$ (ici $m = 3$)

et Σ est la subdivision barycentrique du m-gone :



et on gonfle.

2') 

Σ = droite réelle 

s = réflexion / 0

t = réflexion / 1

— est domaine fondamental strict

3) On va construire pour tous les groupes de Coxeter de rang 3 un complexe simplicial $\mathcal{U}$ tq l'action de W sur $\mathcal{U}$ admet un dom. fondamental strict Δ qui est un triangle. En particulier il y a 3 orbites de sommets
3 orbites d'arêtes
1 seule orbite de plein (= triangle)

On dit que $\mathcal{U}$ est <u>étiquetable</u> ou <u>labellable</u>

Tous les simplexes maximaux de $\mathcal{U}$ ont la même dimension et on peut joindre deux telles splxes max., appelés <u>chambres</u>, par une galerie

(chambres <u>adjacentes</u> ssi $C_1 \cap C_2$ = splx de codim 1)

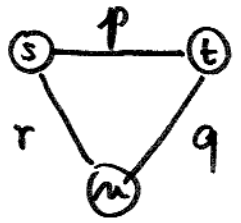
<u>galerie</u> = suite de chambres adjacentes

On dit que $\mathcal{U}$ est un <u>complexe de chambres</u>.

Toute <u>clique</u> ($\overset{\text{def}}{=}$ ss-graphe complet) du 1-squelette de $\mathcal{U}$ borde un triangle plein ; on dit que $\mathcal{U}$ est un <u>complexe drapeau</u>.

Toute <u>cloison</u> (splx de codim 1) est dans 2 chambres ; on dit que $\mathcal{U}$ est <u>fin</u>.

Construisons $\mathcal{U}$.



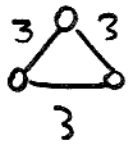
3 cas : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ >1, $=1$, <1

⚠ $p,q,r \neq \infty$ mais $=2$ autorisé

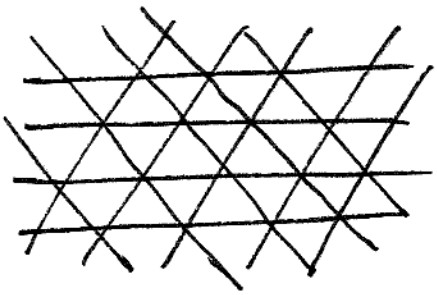
On note Δ le triangle de $S^2/\mathbb{R}^2/\mathbb{H}^2$ d'angles π/p, π/q, π/r. On note Γ le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés de Δ.

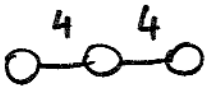
<u>Th</u> $(\gamma(\Delta))_{\gamma\in\Gamma}$ est une triangulation de $S^2/\mathbb{R}^2/\mathbb{H}^2$.

Cas <u>euclidien</u>

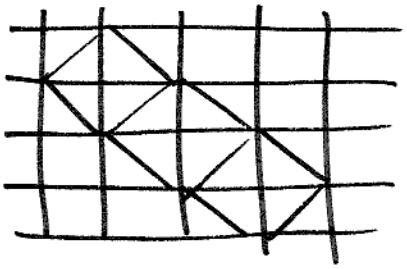


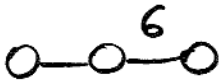
$\tilde{A}_2$



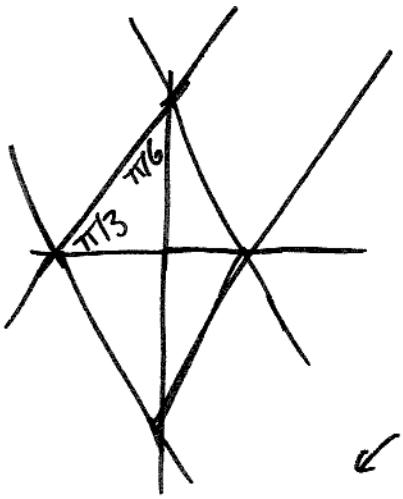


$\tilde{B}_2$



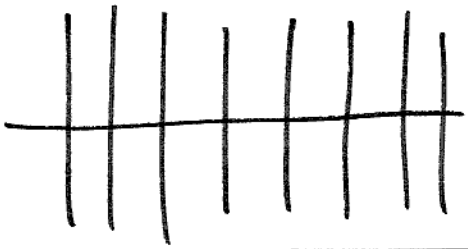


$\tilde{G}_2$



+ sommet à l'∞

NB : $p,q,r = 2,2,\infty$



Cas sphérique

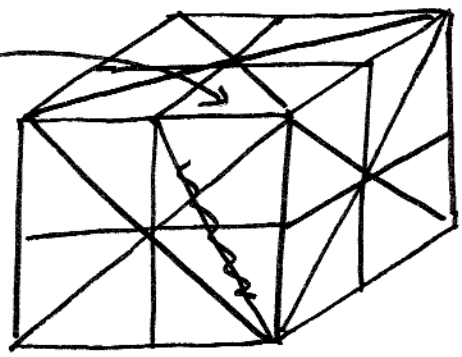
Isom(tétraèdre) $\circ\!-\!\circ\!-\!\circ$ A_3

Isom(cube) $\circ\overset{4}{-}\circ\!-\!\circ$ B_3

Isom(dodéca) $\circ\overset{5}{-}\circ\!-\!\circ$ H_3

Dessinons le Σ du B_3 :

triangle dom. fond avec des sommets :
1 de valence 4
1 — " — 6
1 — " — 8



On voit que le lien d'un sommet est donné par un cplx de groupe de Coxeter de rang 1 de moins.

4). Le théorème de Tits

a) La matrice des cosinus $B = B_W$ est la matrice de coef $B_{st} = -\cos\left(\frac{\pi}{M_{st}}\right)$.

$$B_{ss} = 1$$
$$B_{st} = 0 \quad \text{ssi } M_{st} = 2$$
$$B_{st} \in \left[-\tfrac{1}{2}, -1\right].$$

On note (p_W, q_W, r_W) la signature de la forme bilinéaire associée à la mat. sym B_W

p_W = nb de +
q_W = — " — −
r_W = — " — 0

<u>th</u> Soit W un groupe de Coxeter irréductible.

(+) Si B_W est définie positive alors W est fini (on dit que W est <u>sphérique</u>) et Σ s'identifie à la sphère $S^{\#S-1}$.

(0) Si B_W est positive et non définie (on dit W <u>affine</u>) alors W est virtuellement $\mathbb{Z}^{\#S-1}$ et Σ s'identifie à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{\#S-1}$. Dans ce cas, nécess. $p_W = n-1$, $q_W = 0$, $r_W = 1$.

(−) Sinon, W est large (ie $\exists\, \Gamma < W$ d'indice fini et $\exists\, \varphi : \Gamma \twoheadrightarrow F_2$) et $q_W \geqslant 1$ et $p_W \geqslant 2$.

<u>Rem</u> W est dit <u>Lannér</u> lorsque ~~tous les mineurs~~ toutes les ss-matrices "diagonales de codim 1" sont définies positives, et W n'est ni sphérique ni affine. (En particulier $q_W = 1$ et $r_W = 0$). Dans ce cas, Σ s'identifie à $\mathbb{H}^{\#S-1}$.
(Lannér = hyperbolique pour Brown et Bourbaki).