

Problème de mathématiques générales 1992
Corrigé (Laurent Moret-Bailly, février 2007)

(Les commentaires concernent les copies 2006-2007.)

Partie I

- 2 pts **A1** : T est évidemment linéaire, et si $a, a' \in A$ on a $T(aa') - T(a'a) = T(aa' - a'a) = T([a, a']) = 0$ puisque $[a, a'] \in [A, A]$. Donc T est bien une trace.
- 4 pts **A2** : Il est clair que le sous-espace vectoriel $\ker \tau$ de A contient tous les commutateurs de A , donc contient le sous-espace $[A, A]$ qu'ils engendrent. Donc (propriété universelle du quotient) il existe une unique application linéaire $\bar{\tau} : H_0(A) \rightarrow V$ telle que $\tau = \bar{\tau} \circ T$, d'où la première assertion.
- Considérons maintenant l'application $\varphi : \text{Hom}_k(H_0(A), V) \rightarrow \text{Hom}_k(A, V)$ donnée par $u \mapsto u \circ T$. Alors φ est clairement linéaire, et de plus est à valeurs dans $T(A, V)$ (il résulte immédiatement de A1 que $u \circ T$ est une trace pour tout $u : H_0(A) \rightarrow V$ linéaire). On a donc une application linéaire $\text{Hom}_k(H_0(A), V) \rightarrow T(A, V)$, et la première partie de la question dit précisément qu'elle est bijective. (Noter que son inverse n'est autre que l'application « $\tau \mapsto \bar{\tau}$ » de $T(A, V)$ dans $\text{Hom}_k(H_0(A), V)$).
- 1 pt **A3(a)** : Notons $T_A : A \rightarrow H_0(A)$ et $T_B : B \rightarrow H_0(B)$ les traces canoniques (ce que l'énoncé se dispense de faire). On remarque que $T_B \circ f : A \rightarrow H_0(B)$ est une trace sur A (immédiat puisque $T_B \circ f(aa') = T_B(f(a)f(a')) = T_B(f(a')f(a)) = T_B \circ f(a'a)$). Il suffit alors d'appliquer A2 à la trace $T_B \circ f$.
- 1 pt **A3(b)** : Pour $\alpha \in H_0(A)$, classe de $a \in A$, on a $H_0(f)(\alpha) = T_A(u(au^{-1})) = T_A((au^{-1})u) = T_A(a) = \alpha$, d'où l'assertion.
- 2 pts **B1** : Il s'agit de voir que $T \circ \text{Tr}(mp) = T \circ \text{Tr}(pm)$ pour m et p dans $M_n(A)$. Les deux membres sont linéaires en m et en p , de sorte qu'il suffit de vérifier la formule lorsque m et p parcourent une famille k -génératrice de $M_n(A)$, par exemple la famille des $E_{ij}(a)$ (i et $j \in \{1, \dots, n\}$, $a \in A$). Avec la formule donnée dans l'introduction, on trouve $T \circ \text{Tr}(E_{ij}(a)E_{kl}(a')) = T \circ \text{Tr}(\delta_{jk}E_{il}(aa')) = \delta_{jk}\delta_{il}T(aa')$ et symétriquement $T \circ \text{Tr}(E_{kl}(a')E_{ij}(a)) = \delta_{il}\delta_{jk}T(a'a)$ ce qui est la même chose puisque $T(aa') = T(a'a)$.
- (On peut aussi faire un calcul direct, avec $m = (m_{ij})$ et $p = (p_{ij})$ quelconques).
- 1 pt **B2(a)** : la formule de l'introduction donne immédiatement $[E_{ij}(a), E_{kl}(b)] = \delta_{jk}E_{il}(ab) - \delta_{il}E_{kj}(ba)$.
- 1 pt **B2(b)** : $F_i(a) = [E_{i1}(a), E_{1i}(1)]$.
- 1 pt **B2(c)** : l'« unicité » proclamée par l'énoncé n'a pas de sens. La formule se vérifie directement, par exemple coefficient par coefficient.
- 3 pts **B2(d)** : il est clair que $M'_n(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(A)$; il reste à voir qu'il est contenu dans $[M_n(A), M_n(A)]$.
- Considérons la formule de la question précédente, pour m quelconque. On remarque que les termes $E_{ij}(m_{ij})$ ($i \neq j$) sont des commutateurs : explicitement, $E_{ij}(a) = [E_{ii}(a), E_{ij}(1)]$ par exemple. Il en est de même des $F_i(m_{ii})$ d'après (b).
- Donc, $m \in [M_n(A), M_n(A)]$ si (et seulement si) $E_{11}(\text{Tr}(m)) \in [M_n(A), M_n(A)]$. Supposons maintenant que $m \in M'_n(A)$: alors $\text{Tr}(m) \in [A, A]$. Or l'application linéaire $a \mapsto E_{11}(a) : A \rightarrow M_n(A)$ respecte la multiplication donc envoie $[A, A]$ dans $[M_n(A), M_n(A)]$. On a donc bien $E_{11}(\text{Tr}(m)) \in [M_n(A), M_n(A)]$, cqfd.
- 2 pts **B2(e)** : Comme $T : A \rightarrow H_0(A)$ est surjective, et $\text{Tr} : M_n(A) \rightarrow A$ aussi (parce que $n \geq 1!$), $T \circ \text{Tr}$ est surjective et donc $\overline{T \circ \text{Tr}}$ l'est aussi. Son noyau est l'image dans $H_0(M_n(A))$ du noyau de $T \circ \text{Tr}$, donc est nul d'après (d), cqfd.
- 2 pts **C1** : pour tout $h \in G$, on a

$$\left(\sum_{g \in G} f(g)\chi_g\right)(h) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_g(h) = f(h),$$

d'où $f = \sum_{g \in G} f(g)\chi_g$. Ceci montre que la famille $\{\chi_g\}$ est génératrice. Montrons qu'elle est libre : soit $(\lambda_g)_{g \in G} \in k^G$ tel que $\sum_{g \in G} \lambda_g \chi_g = 0$. Évaluant en $h \in G$ quelconque, on trouve $\lambda_h = 0$, cqfd.

3 pts **C2** : on a par définition $(\chi_g \chi_{g'})(l) = \sum_{h \in G} \chi_g(h) \chi_{g'}(h^{-1}l)$; le terme $\chi_g(h) \chi_{g'}(h^{-1}l)$ est nul sauf si $h = g$ et $h^{-1}l = g'$. La somme est donc nulle sauf si $g^{-1}l = g'$ (i.e. $l = gg'$), auquel cas elle vaut 1. En conclusion, on a $\chi_g \chi_{g'} = \chi_{gg'}$. Il est clair, sur la formule qui le définit, que le produit de convolution est bilinéaire. Il reste à vérifier les propriétés $(ff')f'' = f(f'f'')$ et $f\chi_e = \chi_e f = f$ pour f, f', f'' dans G . Ces formules sont « linéaires en f, f' et f'' » (à cause de la bilinéarité vue ci-dessus) de sorte qu'il suffit de les vérifier lorsque f, f', f'' parcourent un système générateur de $k[G]$, par exemple la base $\{\chi_g\}_{g \in G}$. Les deux formules sont alors immédiates à partir de $\chi_g \chi_{g'} = \chi_{gg'}$, de l'associativité dans G et du fait que e est neutre.

2 pts **C3** : il est clair que T_C est linéaire. Pour voir que $T_C(ff') = T_C(f'f)$ pour f et f' dans $k[G]$, on remarque encore que les deux membres sont linéaires en f et en f' : il suffit donc de faire la vérification pour $f = \chi_g$ et $f' = \chi_{g'}$. Or $T_C(\chi_g \chi_{g'}) = T_C(\chi_{gg'})$ qui vaut 1 si $gg' \in C$ et 0 sinon. Il suffit donc de voir que l'on a l'équivalence $gg' \in C \Leftrightarrow g'g \in C$, ce qui résulte du fait que gg' et $g'g$ sont conjugués ($gg' = g(g'g)^{-1}$).

1 pt **C4(a)** : si α est une forme linéaire sur $k[G]$, et $f \in G$, on a $\alpha(f) = \alpha(\sum_{g \in G} f(g)\chi_g) = \sum_{g \in G} f(g)\alpha(\chi_g)$, d'où le résultat en posant

$$a(g) = \alpha(\chi_g)$$

(cette formule, et pas seulement l'existence de a demandée par l'énoncé, servira dans (b)).

2 pts **C4(b)** : soit $\tau : k[G] \rightarrow k$ une trace. Appliquant le résultat de (a) à la forme linéaire τ , on trouve, en notant Γ l'ensemble des classes de conjugaison de G :

$$\tau(f) = \sum_{g \in G} \tau(\chi_g) f(g) = \sum_{C \in \Gamma} \sum_{g \in C} \tau(\chi_g) f(g).$$

Il suffit donc, pour conclure, de voir que la fonction $g \mapsto \tau(\chi_g)$ est constante sur chaque classe, c'est-à-dire invariante par conjugaison. Mais puisque τ est une trace on a $\tau(\chi_{hgh^{-1}}) = \tau(\chi_{hg} \chi_{h^{-1}}) = \tau(\chi_{h^{-1}} \chi_{hg}) = \tau(\chi_{h^{-1}hg}) = \tau(\chi_g)$, cqfd.

2 pts **C5** : la question précédente montre que $\{T_C\}$ engendrent $T(k[G], k)$. Montrons qu'elle est libre : si l'on a une relation $\sum_{C \in \Gamma} \lambda_C T_C = 0$ on trouve, en évaluant sur l'élément χ_g de $k[G]$, que $\lambda_{\text{classe de } g} = 0$, donc tous les λ_C sont nuls, cqfd.

D'après A2, l'application $\tau \mapsto \bar{\tau}$ est un isomorphisme de $T(k[G], k)$ sur le dual de $H_0(k[G])$; l'image $\{\bar{T}_C\}$ de $\{T_C\}$ par cet isomorphisme est donc bien une base dudit dual.

2 pts **C6** : il résulte de la question précédente que, pour G fini quelconque, $H_0(k[G])$ est de dimension finie égale au nombre de classes de conjugaison de G .

Pour $G = S_r$, ce nombre est égal au nombre de types possibles de décompositions en cycles disjoints; pour S_4 on trouve 5 types (identité, transpositions, 3-cycles, 4-cycles, produits de 2 transpositions disjointes). La dimension cherchée est donc 5.

Partie II

1 pt **A1(a)** : $(e + f)^2 = e^2 + ef + fe + f^2 = e + 0 + 0 + f = e + f$ donc $e + f \in P(A)$.

1 pt **A1(b)** : $(1 - e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$ donc $1 - e \in P(A)$; d'autre part $e(1 - e) = e - e^2 = 0$ et de même $(1 - e)e = 0$.

2 pts **A2** : soit $e \in P(A)$; appliquant (R3) aux idempotents orthogonaux e et $1 - e$, on trouve $r(e) + r(1 - e) = r(1) = 1$ d'après (R1). Mais comme $r(e)$ et $r(1 - e)$ sont dans \mathbb{N} , on a soit $r(e) = 0$, d'où $e = 0$ d'après (R2), soit $r(1 - e) = 0$, d'où $1 - e = 0$ (toujours d'après (R2)) et $e = 1$, cqfd.

2 pts **A3** : il suffit de voir que le produit $A_1 \times A_2$ de deux anneaux non nuls admet un idempotent différent de 0 et de 1. L'élément $e = (1_{A_1}, 0_{A_2})$ est bien idempotent, et il est différent de $0 = (0_{A_1}, 0_{A_2})$ et de $1 = (1_{A_1}, 1_{A_2})$ puisque $0_{A_i} \neq 1_{A_i}$ pour $i = 1, 2$ (l'anneau A_i n'étant pas nul).

3 pts **A4** : comme $e^2 = e$, la matrice e est annulée par le polynôme $X^2 - X$ qui est scindé à racines distinctes. Donc e est diagonalisable, à valeurs propres 0 et 1, et a donc mêmes rang et trace qu'une matrice diagonale à éléments diagonaux tous égaux à 0 ou à 1, pour laquelle l'assertion est triviale.

1 pt **B1** : $\mathbb{Z}[G]$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}[G]$ par définition ; comme il est clair qu'il contient l'unité χ_e , il reste à voir qu'il est stable par le produit de convolution. Comme celui-ci est \mathbb{Z} -bilinéaire il suffit de vérifier que le produit $\chi_g \chi_{g'}$ de deux générateurs quelconques appartient à $\mathbb{Z}[G]$, ce qui résulte encore de la formule $\chi_g \chi_{g'} = \chi_{gg'}$.

3 pts **B2** : écrivons $x = \sum_{g \in G} x(g) \chi_g$ et calculons (les termes diagonaux de) la matrice de \tilde{x} dans la base des χ_g . On a

$$\tilde{x}(\chi_u) = x \chi_u = \sum_{g \in G} x(g) \chi_{gu}$$

et le coefficient de χ_u dans le membre de droite est $x(e) = \tau(x)$. Les termes diagonaux sont donc tous égaux à $\tau(x)$, d'où le résultat.

5 pts **B3** : il est clair sur la définition que τ est à valeurs dans \mathbb{Z} . D'autre part, si $x \in P(\mathbb{Z}[G])$, l'endomorphisme \tilde{x} est idempotent (il est clair que $x \mapsto \tilde{x}$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[G]$ dans $\text{End}(V)$) donc, d'après A4, sa trace est ≥ 0 ; donc $\tau(x) \geq 0$ d'après B2, donc $\tau(x) \in \mathbb{N}$. La propriété (R1) est immédiate sur la définition de τ , ainsi que (R3) (sans condition sur e et f , d'ailleurs). Montrons (R2) : soit $x \in P(\mathbb{Z}[G])$ tel que $\tau(x) = 0$. Alors $\text{Tr}(\tilde{x}) = 0$ par B2, donc \tilde{x} est de rang nul (et donc nul) par A4, donc $x = \tilde{x}(\chi_e) = 0$, cqfd.

On conclut que $\mathbb{Z}[G]$ est indécomposable par A2 et A3.

Partie III :

1 pt **1** : puisque X_A est engendré par les $X(a, b)$ (comme espace vectoriel), il est clair que $C(A)$ est engendré par les $a \wedge b$. Il suffit donc de remarquer que (pour $\lambda \in k$) $\lambda(a \wedge b)$ est de la forme $a' \wedge b'$. Or $\lambda(a \wedge b) - (\lambda a) \wedge b$ est la classe de $-\gamma(a, b, \lambda)$ donc est nul, de sorte que $\lambda(a \wedge b) = (\lambda a) \wedge b$.

2 pts **2** : Par définition, $a \wedge b + b \wedge a$ est la classe dans $C(A)$ de $\alpha(a, b)$, donc est nul. De même, $(ab) \wedge c - a \wedge (bc) + (ca) \wedge b$ est la classe dans $C(A)$ de $\beta(a, b, c)$, donc est nul.

En prenant (par exemple) $b = c = 1$ dans la deuxième relation, on trouve $a \wedge 1 = a \wedge 1 + a \wedge 1$ d'où $a \wedge 1 = 0$, qui entraîne $1 \wedge a = 0$ par antisymétrie.

4 pts **3** : l'unicité est claire puisque $C(A)$ est engendré par les $a \wedge b$. Montrons l'existence.

D'abord, comme les $X(a, b)$ forment une base de X_A , il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : X_A \rightarrow V$ telle que $\tilde{f}(X(a, b)) = f(a, b)$ pour tout $(a, b) \in A \times A$.

On a alors, vu les hypothèses sur f :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha(a, b)) &= f(a, b) + f(b, a) = 0 \\ \tilde{f}(\beta(a, b, c)) &= f(ab, c) - f(a, bc) + f(ca, b) = 0 \\ \tilde{f}(\gamma(a, b, \lambda)) &= f(\lambda a, b) - \lambda f(a, b) = 0 \\ \tilde{f}(\delta(a, b, c)) &= f(a + b, c) - f(a, c) - f(b, c) = 0 \end{aligned}$$

de sorte que \tilde{f} est nulle sur Y_A et passe donc au quotient en une application linéaire $\hat{f} : C(A) \rightarrow V$ telle que, pour tout $(a, b) \in A \times A$, on ait $\hat{f}(a \wedge b) = \tilde{f}(X(a, b)) = f(a, b)$, cqfd.

1 pt **4(a)** : On applique la question 3 avec $V = A$ et $f : A \times A \rightarrow A$ définie par $f(a, b) = [a, b]$. Il est immédiat que f est bilinéaire et antisymétrique ; d'autre part, la relation $[a, bc] = [ab, c] + [ca, b]$ se vérifie directement en « développant » les commutateurs. La question 3 fournit alors $\hat{f} : C(A) \rightarrow A$ qui est l'application θ_A cherchée.

1 pt **4(b)** : comme $C(A)$ est engendré par les $a \wedge b$, l'image de θ_A est le sous-espace de A engendré par les commutateurs, de sorte que $A/\theta_A(C(A)) = A/[A, A] = H_0(A)$.

1 pt **5(a)** : appliquant les définitions, on trouve $\text{Tr}'(E_{ij}(a), E_{kl}(b)) = \delta_{il} \delta_{jk} (a \wedge b)$.

2 pts **5(b)** : on applique la question 3 à l'algèbre $M_p(A)$ et à l'application $f = \text{Tr}' : M_p(A) \times M_p(A) \rightarrow C(A)$. Celle-ci est clairement bilinéaire (d'ailleurs c'est dit dans l'énoncé). D'autre part (dans les sommes ci-dessous,

les indices i, j, \dots parcourent les entiers de 1 à p :

$$\begin{aligned}
\text{Tr}'(m, n) + \text{Tr}'(n, m) &= \sum_{(i,j)} m_{ij} \wedge n_{ji} + \sum_{(k,l)} n_{kl} \wedge m_{lk} \\
&= \sum_{(i,j)} m_{ij} \wedge n_{ji} + \sum_{(i,j)} n_{ji} \wedge m_{ij} \quad (\text{changement des noms d'indices}) \\
&= \sum_{(i,j)} (m_{ij} \wedge n_{ji} + n_{ji} \wedge m_{ij}) \\
&= 0 \quad (\text{relation } a \wedge b + b \wedge a = 0 \text{ de la question 2}).
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\text{Tr}'(m, nq) = \sum_{(i,j)} m_{ij} \wedge (nq)_{ji} = \sum_{(i,j,k)} m_{ij} \wedge (n_{jk}q_{ki})$$

et de même $\text{Tr}'(mn, q) = \sum_{(i,j,k)} (m_{ij}n_{jk}) \wedge q_{ki}$ et $\text{Tr}'(qm, n) = \sum_{(i,j,k)} (q_{ki}m_{ij}) \wedge n_{jk}$ de sorte que la seconde relation de la question 3 résulte de la relation $m_{ij} \wedge (n_{jk}q_{ki}) = (m_{ij}n_{jk}) \wedge q_{ki} + (q_{ki}m_{ij}) \wedge n_{jk}$ de la question 2.

2 pts **5(c)** : Comme $C(M_p(A))$ est engendré par les $m \wedge n$, il suffit de vérifier la relation $\theta_A(\widehat{\text{Tr}}'(m \wedge n)) = \text{Tr} \theta_{M_p(A)}(m \wedge n)$. Le premier membre vaut

$$\theta_A(\text{Tr}'(m, n)) = \sum_{i,j} \theta_A(m_{ij} \wedge n_{ji}) = \sum_{i,j} [m_{ij}, n_{ji}].$$

Le second membre est $\text{Tr}[m, n] = \sum_{i,j} [m_{ij}, n_{ji}]$ (calcul immédiat) d'où la relation cherchée.

Il en résulte que $H_1(M_p(A)) = \ker(\theta_{M_p(A)}) \subset \ker(\theta_A \circ \widehat{\text{Tr}}')$ ce qui signifie bien que $\widehat{\text{Tr}}'(H_1(M_p(A))) \subset \ker(\theta_A) = H_1(A)$.

2 pts **5(d)** : soit $x \in H_1(A)$. Alors, d'après la question 1, x est de la forme $\sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i$, avec (par définition de $H_1(A)$) la relation $\sum_{i=1}^n [a_i, b_i] = 0$ dans A . Considérons l'élément $y = \sum_{i=1}^n E_{11}(a_i) \wedge E_{11}(b_i)$ de $C(M_p(A))$. On a d'abord

$$\begin{aligned}
\theta_{M_p(A)}(y) &= \sum_{i=1}^n [E_{11}(a_i), E_{11}(b_i)] \\
&= \sum_{i=1}^n E_{11}([a_i, b_i]) \\
&= E_{11}(\sum_{i=1}^n [a_i, b_i]) = 0
\end{aligned}$$

de sorte que $y \in H_1(M_p(A))$. De plus $\text{Tr}_1(y) = \widehat{\text{Tr}}'(y) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}'(E_{11}(a_i), E_{11}(b_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i = x$, cqfd.

1 pt **6(a)** : La relation $\text{res}(P') = 0$ est immédiate à partir des définitions.

La formule pour $(PQ)'$ est clairement bilinéaire en (P, Q) de sorte qu'il suffit de la vérifier pour $P = t^m$ et $Q = t^n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$). On a alors :

$$(PQ)' = (t^{m+n})' = (m+n)t^{m+n-1} \quad \text{et} \quad P'Q + PQ' = mt^{m-1}t^n + nt^n t^{m-1} = (m+n)t^{m+n-1}$$

d'où le résultat.

2 pts **6(b)** : On applique la question III-3 à l'algèbre $A = k[t, t^{-1}]$ et à l'application, clairement bilinéaire, $f : A \times A \rightarrow k$ donnée par $f(P, Q) = \text{res}(PQ')$. Vérifions les deux relations du III-3 : d'abord

$$f(P, Q) + f(Q, P) = \text{res}(PQ' + P'Q) = \text{res}((PQ)') = 0$$

(question précédente) et d'autre part

$$\begin{aligned} f(P, QR) - f(PQ, R) - f(RP, Q) &= \text{res}(P(QR)') - PQR' - RPQ' \\ &= \text{res}(PQR' + PQ'R - PQR' - RPQ') = 0 \end{aligned}$$

(on remarque que A est commutative!), cqfd.

- 3 pts **6(c)** : notons $\Phi(P, n)$ l'égalité $P \wedge t^n = nPt^{n-1} \wedge t$ à démontrer.
 D'abord $\Phi(P, 0)$ est l'identité $P \wedge 1 = 0$ vue en III-2.
 Supposons $\Phi(P, n-1)$ vérifiée pour tout P . Alors

$$\begin{aligned} P \wedge t^n &= P \wedge tt^{n-1} \\ &= (Pt) \wedge t^{n-1} + (t^{n-1}P) \wedge t \quad (\text{d'après III-2}) \\ &= (n-1)t^{n-2}Pt \wedge t + (t^{n-1}P) \wedge t \quad (\text{d'après } \Phi(Pt, n-1)) \\ &= nPt^{n-1} \wedge t \end{aligned}$$

de sorte que, par récurrence, $\Phi(P, n)$ est vérifiée pour tout P et tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, le calcul qui précède montre que, pour t et P quelconques, $\Phi(P, n)$ est équivalente à $\Phi(Pt, n-1)$. Comme t est inversible dans A , on voit donc que, pour n donné, $\Phi(P, n)$ pour tout P implique $\Phi(P, n-1)$ pour tout P (plus précisément, $\Phi(t^{-1}P, n)$ implique $\Phi(P, n-1)$). Donc $\Phi(P, 0)$ (pour tout P) implique aussi $\Phi(P, n)$ pour tout P et tout $n \leq 0$.

[Autre méthode pour l'exposant négatif : on remarque que, pour $n > 0$, on a

$$0 = Pt^{-n} \wedge 1 = Pt^{-n} \wedge (t^{-n}t^n) = Pt^{-2n} \wedge t^n + P \wedge t^{-n}$$

d'où $P \wedge t^{-n} = -Pt^{-2n} \wedge t^n$, auquel on applique la formule $\Phi(-Pt^{-2n}, n)$.]

La relation $P \wedge Q = PQ' \wedge t$ en résulte par linéarité en Q ($\Phi(P, n)$ étant le cas où $Q = t^n$). On en déduit $P \wedge Q = -Q \wedge P = -QP' \wedge t$, et en prenant $Q = 1$ on trouve $P' \wedge t = 0$.

- 3 pts **6(d)** : on remarque d'abord que puisque l'algèbre $k[t, t^{-1}]$ est commutative, l'application $\theta_{k[t, t^{-1}]}$ est nulle de sorte que $H_1(k[t, t^{-1}]) = C(k[t, t^{-1}])$. Il s'agit donc de voir que $\text{Res} : C(k[t, t^{-1}]) \rightarrow k$ est un isomorphisme. D'abord $\text{Res}(t^{-1} \wedge t) = \text{res}(t^{-1}) = 1$ donc Res est surjectif. Pour conclure, il suffit donc de voir que $C(k[t, t^{-1}])$ est de dimension ≤ 1 , c'est-à-dire engendré (comme k -espace vectoriel) par un élément. On sait qu'il est engendré par les $P \wedge Q$, donc par les $P \wedge t^n$ par linéarité en Q , donc par les $P \wedge t$ d'après la première relation de 6(c), donc par les $t^m \wedge t$ ($m \in \mathbb{Z}$) par linéarité en P . Mais, si $m \neq -1$, on a $t^m = (t^{m+1}/(m+1))'$ (on utilise la caractéristique nulle ici) donc $t^m \wedge t = 0$ pour $m \neq -1$ (dernière relation de 6(c)), de sorte que $C(k[t, t^{-1}])$ est engendré par le seul élément $t^{-1} \wedge t$, cqfd.

Partie IV :

- 1 pt **A1(a)** : pour $u, v, w \in U$ et $x, y, z \in E$, on a

$$\begin{aligned} \{(u, x), (v, y)\} + \{(v, y), (u, x)\} &= (\langle u, v \rangle, \alpha(u, v)) + (\langle v, u \rangle, \alpha(v, u)) \\ &= (\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle, \alpha(u, v) + \alpha(v, u)) = (0, 0) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \{(u, x), \{(v, y), (w, z)\}\} &= \{(u, x), (\langle v, w \rangle, \alpha(v, w))\} \\ &= (\langle u, \langle v, w \rangle \rangle, \alpha(u, \langle v, w \rangle)) \end{aligned}$$

de sorte que (L2) pour $\{, \}$ résulte de (L2) pour \langle, \rangle et de (C2) pour α .

- 1 pt **A1(b)** : il est clair que p est linéaire, et d'autre part il résulte des définitions que $p(\{(u, x), (v, y), \}) = \langle u, v \rangle$, cqfd.
- 2 pts **A1(c)** : soit $s : L \rightarrow L(\alpha)$ un ℓ -morphisme tel que $p \circ s = \text{Id}_L$. Alors s est de la forme $u \mapsto (u, f(u))$ où $f : U \rightarrow E$ est linéaire. La relation $s(\langle u, v \rangle) = \{s(u), s(v)\}$ donne immédiatement $\alpha(u, v) = f(\langle u, v \rangle)$.

Réciproquement, soit f comme dans l'énoncé : alors le même calcul montre que l'application $u \mapsto (u, f(u))$ est un ℓ -morphisme de L dans $L(\alpha)$ tel que $p \circ s = \text{Id}_L$.

1 pt **A2(a)** : les deux relations résultent de la définition du crochet, et d'un calcul explicite.

1 pt **A2(b)** : vu la linéarité de φ , il suffit de voir que $(a, b) \mapsto a \wedge b$ est un cocycle sur $L(A)$ à valeurs dans $C(A)$. La relation (C1) s'écrit (pour $a, b, c \in A$) :

$$a \wedge b + b \wedge a = 0$$

ce qui a été vu dans III-2, et

$$a \wedge [b, c] + b \wedge [c, a] + c \wedge [a, b] = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$a \wedge bc - a \wedge cb + b \wedge ca - b \wedge ac + c \wedge ab - c \wedge ba = 0$$

qui résulte des relations de III-2.

3 pts **A2(c)** : d'après les définitions et A1(c), l'extension $L(A)(\alpha_\varphi)$ est triviale si et seulement si il existe une application linéaire $f : A \rightarrow E$ telle que l'on ait $\varphi(a \wedge b) = f([a, b])$ pour tous a et b dans A .

Supposons cette condition réalisée, et soit $z \in H_1(A)$: alors z est de la forme $z = \sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i$ avec $n \in \mathbb{N}$, les a_i et b_i dans A , et $\sum_{i=1}^n [a_i, b_i] = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{i=1}^n \varphi(a_i \wedge b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f([a_i, b_i]) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n [a_i, b_i]\right) = 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons φ nulle sur $H_1(A)$. On sait que $[A, A]$ est l'image de $\theta_A : C(A) \rightarrow A$ donc s'identifie au quotient $C(A)/H_1(A)$. Donc il existe $f_0 : [A, A] \rightarrow E$ linéaire (d'ailleurs unique) telle que $\varphi = f_0 \circ \theta_A$ et donc telle que $\varphi(a \wedge b) = f_0([a, b])$ pour tous a et b dans A . Il suffit alors de remarquer qu'il existe une application linéaire $f : A \rightarrow E$ prolongeant f_0 : celle-ci a alors la propriété voulue. (L'existence de f résulte de l'existence d'un supplémentaire de $[A, A]$ dans A , qui entraîne celle d'un projecteur $\pi : A \rightarrow A$ d'image $[A, A]$: on prend alors $f = \pi \circ f_0$).

4 pts **B1** : il est clair que les t^n ($n \in \mathbb{Z}$) forment une base de A ; il en résulte que les $E_{ij}(t^n)$ forment une base de $M_p(A)$, d'où la base annoncée pour $M_p(A) \times k$.

Par définition, le ℓ -espace sous-jacent à $L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$ est $M_p(A) \times k$ muni du crochet

$$\begin{aligned} \{(m, \lambda), (n, \mu)\} &= ([m, n], \alpha_\varphi(m, n)) \\ &= ([m, n], \varphi(m \wedge n)) \quad (\text{définition de } \alpha_\varphi) \\ &= ([m, n], \text{Res}(\widehat{\text{Tr}}'(m \wedge n))) \quad (\text{définition de } \varphi) \\ &= ([m, n], \text{Res}(\widehat{\text{Tr}}'(m, n))) \quad (\text{définition de } \widehat{\text{Tr}}'). \end{aligned}$$

On voit déjà que si m ou n est nul le résultat est nul, d'où $\{c, z\} = 0$ pour tout $z \in L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$.

D'autre part la formule précédente donne :

$$\begin{aligned} \{e_{ij}(t^n), e_{kl}(t^m)\} &= ([E_{ij}(t^n), E_{kl}(t^m)], \text{Res}(\widehat{\text{Tr}}'(E_{ij}(t^n), E_{kl}(t^m)))) \\ &= (\delta_{jk} E_{il}(t^{m+n}) - \delta_{il} E_{kj}(t^{m+n}), \text{Res}(\delta_{il} \delta_{jk} (t^n \wedge t^m))) \quad (\text{I-B2(a) et III-5(a)}) \\ &= (\delta_{jk} E_{il}(t^{m+n}) - \delta_{il} E_{kj}(t^{m+n}), \delta_{il} \delta_{jk} \text{res}(mt^{n+m-1})) \quad (\text{définition de } \text{Res}). \end{aligned}$$

Si $m+n \neq 0$, le résidu au dernier membre est nul, d'où la seconde formule. Si $n = -m$, le résidu vaut m , et $t^{m+n} = 1$, ce qui donne

$$\{e_{ij}(t^{-m}), e_{kl}(t^m)\} = (\delta_{jk} E_{il}(1) - \delta_{il} E_{kj}(1), m \delta_{il} \delta_{jk})$$

d'où la troisième formule.

- 1 pt **B2** : d'après A2(c), l'extension est triviale si et seulement si la restriction (notons-la φ_1) de $\varphi = \widehat{Res} \circ \widehat{\text{Tr}}$ à $H_1(M_p(A))$ est nulle. On peut écrire φ_1 comme $\text{Res} \circ \text{Tr}_1$ où $\text{Tr}_1 : H_1(M_p(A)) \rightarrow H_1(A)$ est définie en III-5(c), et est surjective d'après III-5(d). De plus $\text{Res} : H_1(A) \rightarrow k$ est aussi surjective (et même bijective) d'après III-6(d). Donc $\varphi_1 : H_1(M_p(A)) \rightarrow k$ est surjective, et par suite l'extension $L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$ n'est pas triviale.

[Variante explicite : soit $z := E_{11}(t^{-1}) \wedge E_{11}(t) \in C(M_p(A))$. Alors $z \in H_1(M_p(A))$ car les deux matrices E_{11} commutent; d'autre part $\varphi(z) = \text{Res}(t^{-1} \wedge t) = \text{res}(t^{-1}) = 1$, donc φ n'est pas nulle sur $H_1(A)$.]

- 1 pt **C1(a)** : il est immédiat que $P \mapsto \tilde{P}$ est linéaire, envoie 1 sur Id_A et respecte la multiplication (conséquence de l'associativité d'icelle).
- 1 pt **C1(b)** : il s'agit de montrer que, pour tout $Q \in A$, on a

$$d^q(PQ) = \sum_{\ell=0}^q \binom{q}{\ell} P^{(\ell)} Q^{(q-\ell)}$$

ce qui n'est autre que la « formule de Leibniz », qui se vérifie par exemple directement pour $P = t^n$ et $Q = t^m$, ce qui suffit par bilinéarité.

- 2 pts **C2(a)** : il résulte de 1(a) que les \tilde{P} forment un sous-espace de $\text{End}(A)$, qui est engendré par les u^p ($p \in \mathbb{Z}$) (noter qu'un morphisme d'algèbres respecte aussi les inverses donc $u^p = \tilde{t}^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$). Donc D est engendré par les $u^p d^q$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$).

Montrons qu'ils forment une famille libre : supposons une relation non triviale

$$\sum_{q=a}^b \sum_{p=-M}^M \lambda_{p,q} u^p d^q = 0$$

avec $0 \leq a \leq b$, et $\lambda_{p,a} \neq 0$ pour au moins un p . Appliquant cette relation dans $\text{End}(A)$ à l'élément $t^a \in A$, et remarquant que $d^q(t^a) = 0$ pour $q > a$ et $d^a(t^a) = a!$, on obtient

$$a! \sum_p \lambda_{p,a} t^p = 0$$

et comme k est de caractéristique nulle, le coefficient $a!$ est non nul de sorte que les $\lambda_{p,a}$ sont tous nuls, contrairement à l'hypothèse.

- 1 pt **C2(b)** : il est clair que D est stable par multiplication à gauche par les u^p ($p \in \mathbb{Z}$) et à droite par les d^q ($q \in \mathbb{N}$). Il reste à voir qu'il est stable par multiplication à droite par les u^p et à gauche par les d^q : les deux propriétés résultent de 1(b).

Comme on sait déjà que D est un sous-espace de $\text{End}(A)$, et qu'il contient $\text{Id}_A = \tilde{1}$, c'est bien une sous-algèbre de $\text{End}(A)$.

- 2 pts **C3** : on a $[u, u^q d^r] = u^{q+1} d^r - u^q d^r u$. Appliquant 1(b) avec $P = t$, on trouve $d^r u = u d^r + r d^{r-1}$; en substituant, on obtient

$$[u, u^q d^r] = -r u^q d^{r-1}$$

(si $r = 0$, le second membre est nul). Cette formule montre que $[D, D]$ contient tous les $u^q d^m$ pour $q \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ puisque $u^q d^m = -[u, u^q d^{m+1}]/(m+1)$ (on utilise encore la caractéristique 0). Comme ces gens engendrent D , on a $[D, D] = D$ d'où $H_0(D) = 0$. Donc toute trace sur D est nulle d'après I-A2.

- 1 pt **D1** : un calcul immédiat (à partir de la formule $(PQ)' = P'Q + PQ'$) donne $d\tilde{P} = \tilde{P}' + \tilde{P}d$ pour tout $P \in A$. On en tire

$$\begin{aligned} [\tilde{P}d, \tilde{Q}d] &= \tilde{P}d\tilde{Q}d - \tilde{Q}d\tilde{P}d \\ &= \tilde{P}(\tilde{Q}' + \tilde{Q}d)d - \tilde{Q}(\tilde{P}' + \tilde{P}d)d \\ &= (PQ' - QP')d. \end{aligned}$$

Comme il est clair que W est l'ensemble des $\tilde{P}d$ pour $P \in A$, ce calcul montre qu'il est stable par le crochet et est donc un ℓ -espace.

4 pts **D2** : noter d'abord que α est bien définie car $\tilde{P}d$ détermine P (en effet, $P = (\tilde{P}d)(t)$). Plus précisément, l'application $\varphi : P \mapsto \tilde{P}d$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de A sur W ; la question D1 montre que cet isomorphisme transforme la loi de composition

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle := PQ' - QP'$$

sur A en le crochet $[\cdot, \cdot]$ sur W , de sorte que \langle, \rangle est un crochet sur A et que φ est un isomorphisme de ℓ -espaces. Il s'agit donc de voir que l'application $\beta : A \times A \rightarrow k$ donnée par

$$\beta(P, Q) = \frac{1}{12} \text{res}(P'Q'' - P''Q')$$

est un cocycle sur (A, \langle, \rangle) . Il suffit évidemment de vérifier (on est en caractéristique nulle) que 12β est un cocycle.

La relation (C1) est évidente; d'autre part on peut remarquer que $P'Q'' - P''Q' = (P'Q')' - 2P''Q'$, et comme le résidu de $(P'Q')'$ est nul d'après III-6(a), on est ramené à voir que $\gamma : A \rightarrow k$ défini par

$$\gamma(P, Q) = \text{res}(P''Q')$$

vérifie (C2).

Calculons $\gamma(P, \langle Q, R \rangle)$:

$$\begin{aligned} \gamma(P, \langle Q, R \rangle) &= \text{res}(P''\langle Q, R \rangle') \\ &= \text{res}(P''(Q'R - QR'))' \\ &= \text{res}(P''Q''R - P''QR''). \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \gamma(P, \langle Q, R \rangle) + \gamma(Q, \langle R, P \rangle) + \gamma(R, \langle P, Q \rangle) \\ = \text{res}(P''Q''R + PQ''R'' + P''QR'' - P''QR'' - P''Q''R - PQ''R'') \\ = \text{res}(0) = 0. \end{aligned}$$

d'où la relation (C2).

3 pts **D3** : posons $c = (0, 1)$ et $L_n = (u^{n+1}d, 0)$. Il est clair que les L_n et c forment une base de Vir (en effet, les $u^{n+1}d$ forment une base de W puisque les t^{n+1} forment une base de A), et il est clair sur la définition du crochet dans Vir que $\{c, x\} = \{x, c\} = 0$ pour tout $x \in Vir$.

On trouve immédiatement $[u^{n+1}d, u^{m+1}d] = (m-n)u^{n+m+1}d$ (en utilisant D1 par exemple). D'autre part

$$\alpha(u^{n+1}d, u^{m+1}d) = \frac{1}{12} \text{res}((n+1)(m+1)(m-n)t^{m+n-1})$$

d'où

$$\{L_n, L_m\} = (m-n) \left(u^{n+m+1}d, \frac{1}{12} \text{res}((n+1)(m+1)t^{m+n-1}) \right).$$

Si $n+m \neq 0$ le résidu est nul et

$$\{L_n, L_m\} = (m-n)(u^{n+m+1}d, 0) = (m-n)L_{n+m}.$$

En prenant $n = -m$ on trouve d'autre part

$$\begin{aligned} \{L_{-m}, L_m\} &= (2m) \left(ud, \frac{1}{12} \text{res}((-m+1)(m+1)t^{-1}) \right) \\ &= 2m(ud, 0) + \frac{2m(1-m^2)}{12}(0, 1) \\ &= 2mL_0 - \frac{m^3 - m}{6}c. \end{aligned}$$

1 pt **D4(a)** : supposons l'extension triviale. D'après A-1(c), il existe une application linéaire $f : W \rightarrow k$ telle que $\alpha(\tilde{P}d, \tilde{Q}d) = f([\tilde{P}d, \tilde{Q}d])$ pour tous P et Q dans A . Or $\alpha(u^{n+1}d, u^{m+1}d) = 0$ chaque fois que $n = -1$ par exemple; on doit donc avoir, pour tout m ,

$$0 = f([d, u^{m+1}d]) = (m+1)f(u^m d)$$

d'où $f(u^m d) = 0$ pour tout $m \neq -1$; d'autre part, prenant $n = 0$ et $m = -2$ dans les formules qui précèdent, on trouve

$$\begin{aligned} [u d, u^{-1} d] &= -2u^{-1} d \\ \alpha(u d, u^{-1} d) &= 0 \end{aligned}$$

(dans la seconde équation apparaît le résidu de t^{-3}) d'où aussi $f(u^{-1} d) = 0$: finalement, f est nulle sur tous les $u^p d$ donc nulle, ce qui est absurde puisque $\alpha(u^{-1} d, u^3 d) \neq 0$ par exemple.

Donc l'extension *Vir* n'est pas triviale.

1 pt **D4(b)** : considérons l'extension $p : L(D)(\alpha_\varphi) \rightarrow L(D)$. Sa restriction au-dessus du sous- ℓ -espace W de $L(D)$ est l'extension *Vir*, et n'est donc pas triviale. Donc $L(D)(\alpha_\varphi)$ n'est pas triviale, et il est donc clair d'après A-2(c) que $H_1(D)$ n'est pas nul.