Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Évaluation des exercices :
[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.
[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 8

Groupes abéliens finis

[S] **Exercice 1 -** Les groupes $A = (\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ et $B = (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})$ sont-ils isomorphes ?

[S] **Exercice 2 -** Soit A un groupe abélien fini. On suppose que A n'est pas cyclique. Déduire du théorème de structure que A admet deux sous-groupes cycliques distincts et isomorphes. Réciproque ?

[S] **Exercice 3 -** Soit K un corps.

1 - Soit G un sous-groupe fini d'ordre d de $(K^*, \times)$. Montrer que $G = \{z \in K^* | z^d = 1\}$.

2 - En déduire, en utilisant l'exercice **2**, que tout sous-groupe fini de K^* est cyclique.

Exercice 4 - (Dualité des groupes abéliens finis). On note Γ le groupe multiplicatif des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire le sous-groupe de torsion de $\mathbb{C}^*$).

1 - Montrer que Γ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Pour tout groupe abélien A, on appellera *dual* de A le groupe $\widehat{A} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{groupes}}(A, \Gamma)$ des morphismes de groupes de A dans Γ (appelés aussi *caractères* de A). Pour tout morphisme $f : A \to B$ de groupes abéliens, on notera $\widehat{f} : \widehat{B} \to \widehat{A}$ le morphisme $\chi \mapsto \chi \circ f$. (Attention, $\widehat{A}$ n'est pas le dual de A comme $\mathbb{Z}$-module).

2 - Avec les notations ci-dessus, on suppose f surjectif. Montrer que $\widehat{f}$ est injectif.

3 - Quel est le dual de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? En déduire (par le théorème de structure) que si G est un groupe abélien fini, alors $\widehat{G}$ est isomorphe à G.

4 - Soit $f : A \to B$ un morphisme injectif de groupes abéliens finis. Montrer que $\widehat{f}$ est surjectif. [Indications : on considère les morphismes canoniques $\widehat{f} : \widehat{B} \to \widehat{A}$ et $\widehat{\pi} : \widehat{B/A} \to \widehat{B}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\widehat{f} = \mathrm{Im}\,\widehat{\pi}$ (propriété universelle du quotient !). Remarquant que $\widehat{\pi}$ est injectif (question **2**) en déduire l'ordre de $\mathrm{Ker}\,\widehat{f}$, puis celui de $\mathrm{Im}\,\widehat{f}$ et conclure.]

5 - Soit G un groupe abélien fini, et soit $g \in G$ distinct de l'élément neutre. Montrer qu'il existe un caractère χ de G tel que $\chi(g) \neq 1$. (Appliquer la question précédente au sous-groupe engendré par g).

6 - Soit G un groupe abélien. Définir un morphisme naturel $\varepsilon_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$. Si G est fini, montrer que ε_G est injectif, puis que c'est un isomorphisme.

Dans les deux questions suivantes on généralise le résultat de la question **4** aux groupes non nécessairement finis (même pour les groupes finis, la démonstration n'utilise pas la classification).

7 - Soient G un groupe abélien (noté additivement), H un sous-groupe de G, et γ un élément de G tel que G soit engendré par $H \cup \{\gamma\}$, et $i : H \to G$ l'inclusion. Montrer que $\widehat{i} : \widehat{G} \to \widehat{H}$ est surjectif. [Indications : soit $\chi : H \to \Gamma$ un caractère, qu'il s'agit de prolonger à G. Le groupe G/H est engendré par la classe de γ ; soit m son ordre. Si m est infini, alors H admet un supplémentaire dans G, à savoir le groupe engendré par γ ; on en déduit immédiatement le résultat. Si m est fini, choisir $u \in \Gamma$ tel que $u^m = \chi(m\gamma)$ et montrer qu'il existe un caractère de G prolongeant χ et envoyant γ sur u.]

8 - Soit $f : A \to B$ un morphisme injectif de groupes abéliens. Montrer que $\widehat{f}$ est surjectif. (On peut supposer que A est un sous-groupe de B et f l'inclusion ; utiliser alors la question précédente et le lemme de Zorn ; si B est fini on peut remplacer Zorn par une récurrence.)

Algèbres, polynômes

Dans les exercices qui suivent, on désigne par k un anneau commutatif. Si I est un ensemble on note $k\langle I\rangle$ l'algèbre de polynômes $k[(X_i)_{i\in I}]$.

[E] **Exercice 5 -** Soit A une k-algèbre. Trouver tous les morphismes de k-algèbres :

(i) de A dans l'algèbre nulle ; (ii) de l'algèbre nulle dans A ; (iii) de k dans A.

Exercice 6 - Soit A une k-algèbre. Pour tout $\alpha \in A$, notons $\mathrm{mul}_{\alpha,A} : A \to A$ (ou seulement mul_α) la multiplication à gauche par α ($\mathrm{mul}_\alpha(x) = \alpha\, x$). (Remarque : on pourra simplifier un peu l'exercice en supposant A commutative).

[E] **1** - Montrer que l'application $\alpha \mapsto \mathrm{mul}_\alpha : A \to \mathrm{End}_{k\text{-module}}(A)$ est un morphisme injectif de k-algèbres. En déduire que pour tout $P \in k[X]$ on a $\mathrm{mul}_{P(\alpha)} = P(\mathrm{mul}_\alpha)$.

[E] **2** - Montrer que pour tout $\alpha \in A$, le polynôme minimal de α est égal à celui de mul_α.

[S] **3** - On suppose que k est un corps. Montrer que toute k-algèbre de dimension finie est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de matrices.

4 - Qu'est-ce qui change dans les questions précédentes si l'on remplace mul_α par la multiplication à droite $x \mapsto x\,\alpha$?

Exercice 7 -

[ES] **1** - Soit J un idéal de k. Montrer que $J\,k[X]$ est formé des polynômes dont tous les coefficients appartiennent à J. Définir un isomorphisme de $k[X]/J\,k[X]$ sur $(k/J)[X]$.

[ES] **2** - Soit $P \in k[X]$. On suppose que le coefficient dominant de P est régulier dans k. Montrer que P est régulier dans $k[X]$. Même question avec le coefficient non nul de plus bas degré.

[ES] **3** - Montrer que $k[X]$ est intègre si et seulement si k est intègre. Dans ce cas, montrer que $k[X]^\times = k^\times$.

[S] **4** - Montrer que $k[X]$ est principal si et seulement si k est un corps.

[ES] **5** - Montrer que $k[X]$ n'est jamais un corps.

[S] **6** - Montrer qu'un idéal J de k est premier si et seulement si $J\,k[X]$ est premier.

7 - Montrer que $P \in k[X]$ est nilpotent si et seulement si tous ses coefficients sont nilpotents.

8 - Montrer que $k[X]$ est réduit si et seulement si k est réduit.

9 - Montrer que $k[X]^\times$ est formé des polynômes P dont le terme constant est inversible dans k et dont tous les autres coefficients sont nilpotents. [On pourra utiliser la question **3**, le fait que le nilradical est l'intersection des idéaux premiers (feuille 3, exercice 1) et la question **6**.] Qu'obtient-on si k est réduit ?

Exercice 8 - Généraliser l'exercice **7** aux polynômes en une famille quelconque d'indéterminées.

Exercice 9 - On fixe un ensemble J et un sous-ensemble $I \subset J$; on identifie ainsi $k\langle I\rangle$ à un sous-anneau de $k\langle J\rangle$.

1 - Montrer que l'inclusion $k\langle I\rangle \hookrightarrow k\langle J\rangle$ admet une rétraction ; plus précisément, $k\langle J\rangle$ s'identifie à $(k\langle I\rangle)\langle J \setminus I\rangle$.

2 - Soit $P \in k\langle I\rangle$. Montrer que P est inversible dans $k\langle I\rangle$ si et seulement si il l'est dans $k\langle J\rangle$.

3 - Même question en remplaçant « inversible » par « régulier ».

4 - Même question en remplaçant « inversible » par « irréductible », en supposant k intègre.

[S] **Exercice 10 -** Soient I un ensemble et $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in I} \in k^I$. On considère le morphisme d'évaluation $\mathrm{ev}_{\underline{\alpha}} : k\langle I\rangle \to k$ donné par $P \mapsto P(\underline{\alpha})$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ev}_{\underline{\alpha}})$ est l'idéal engendré par les polynômes $X_i - \alpha_i$ $(i \in I)$. (On pourra se ramener par translation au cas où $\underline{\alpha} = \underline{0}$, en justifiant soigneusement l'argument).

Exercice 11 - (Les polynômes comme fonctions universelles). Pour tout $P \in k[X]$ et toute k-algèbre commutative A, notons $P_A : A \to A$ la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$.

1 - Calculer $P_{k[X]}(X)$. En déduire que la connaissance de P_A pour toute A détermine P.

2 - Soit $f : A \to B$ un morphisme de k-algèbres commutatives. Montrer que $P_B \circ f = f \circ P_A$.

3 - Supposons donnée, pour toute k-algèbre commutative A, une application $\Phi(A) : A \to A$ vérifiant la condition de la question **2** : pour tout morphisme $f : A \to B$ on a $\Phi(B) \circ f = f \circ \Phi(A)$. Montrer qu'il existe un unique $P \in k[X]$ tel que $\Phi(A) = P_A$ pour toute k-algèbre commutative A. (Indication : pour trouver P et montrer l'unicité, utiliser la question **1**).

Exercice 12 - Généraliser l'exercice **11** aux polynômes sur un ensemble quelconque I d'indéterminées et aux fonctions polynomiales $A^I \to A$ qu'ils définissent.

Éléments algébriques

Dans ce qui suit, k désigne un corps. Sauf mention contraire, les k-algèbres sont commutatives.

[E] **Exercice 13 -** Soit A une k-algèbre et soient α et β deux éléments de A. Vrai ou faux :

(i) si α et β sont algébriques sur k, il en est de même de $\alpha + \beta$;

(ii) si α et β sont transcendants sur k, il en est de même de $\alpha + \beta$;

(iii) si α est algébrique et β transcendant sur k, $\alpha + \beta$ est transcendant ;

(iv) si α est algébrique sur k et inversible dans A, alors son inverse est algébrique ;

(v) si α et $\alpha\beta$ sont algébriques sur k, il en est de même de β ;

(vi) même question en supposant α inversible dans A ;

(vii) même question en supposant α régulier dans A ;

(viii) si $f : A \to B$ est un morphisme de k-algèbres et si α est algébrique sur k, il en est de même de $f(\alpha)$;

(ix) même question en remplaçant « algébrique » par « transcendant ».

Exercice 14 -

1 - Trouver une relation de dépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ pour le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

2 - Même question pour $x=\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$. (Indication : considérer $x-\sqrt{3}$).

3 - Plus généralement, soient α et β deux nombres algébriques α et β, racines respectives de P et $Q \in \mathbb{Q}[X]$ non nuls. On pose $m=\deg P$ et $n=\deg Q$. Étant donné un polynôme $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$, expliquer comment trouver un polynôme non nul annulant le nombre $\gamma := F(\alpha,\beta)$. [Indication : le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha,\beta]$ est engendré par les $\alpha^i\,\beta^j$ $(0 \le i < m,\ 0 \le j < n)$; considérer la famille $(1,\gamma,\gamma^2,\dots,\gamma^{mn})$.]

Exercice 15 - Soient k un corps et A une k-algèbre de dimension finie n (comme k-espace vectoriel). On utilise la notation « mul » de l'exercice **6**. Pour tout $\alpha \in A$, on appelle *norme* de α (dans A, relativement à k) le déterminant de mul_α. La norme sera notée $\mathrm{N}_{A/k}(\alpha)$, ou simplement $\mathrm{N}(\alpha)$.

1 - Calculer $\mathrm{N}_{A/k}(\alpha)$ dans chacun des cas suivants :

(i) $A=\{0\}$; (ii) $\alpha \in k$; (iii) $A=k^n$ (l'algèbre produit);
(iv) $k=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{C}$; (v) $k=\mathbb{Q}$, $A=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$; (vi) $A=\mathrm{M}_p(k)$.

[Indication pour (vi) : écrire $\mathrm{M}_p(k)$ comme somme directe des p sous-espaces formés des matrices « à une seule colonne ».]

2 - Calculer $\mathrm{N}_{A/k}(\alpha\beta)$ en fonction de $\mathrm{N}_{A/k}(\alpha)$ et de $\mathrm{N}_{A/k}(\beta)$.

3 - Montrer que $\alpha \in A$ est inversible si et seulement si $\mathrm{N}_{A/k}(\alpha) \neq 0$.

4 - Généraliser l'exercice au cas où k est un anneau commutatif quelconque et où A est une k-algèbre qui est un k-module libre de rang fini.

Exercice 16 - Soient K un corps, L une extension finie de K (c'est-à-dire une K-algèbre de dimension finie qui est un corps), et $x \in L$. On désigne par $\mathrm{mul}_x : L \to L$ le K-endomorphisme de multiplication par x. On notera $d=[L:K]$, $r=[L:K(x)]$, et μ_x le polynôme minimal de x sur K.

1 - Quelle est la nature de mul_x lorsque $x \in K$? (On cherchera à exprimer la matrice de mul_x dans une K-base de L.)

2 - On suppose que $L=K(x)$. Montrer que mul_x est un endomorphisme cyclique du K-espace vectoriel $K(x)$. Quel est son polynôme minimal ? (Là encore, on cherchera à exprimer la matrice de mul_x dans une base bien choisie.)

3 - On revient au cas général. Montrer que le polynôme minimal de mul_x est égal à μ_x. En déduire la liste des invariants de similitude de mul_x (c'est-à-dire les facteurs invariants du $K[X]$-module L_{mul_x}), ainsi que le polynôme caractéristique de mul_x.

4 - Exprimer $\mathrm{N}_{L/k}(x)$ (cf. exercice **15**) en fonction de μ_x.

5 - Exhiber une K-base de L dans laquelle la matrice de mul_x est sous forme réduite de Frobenius (c'est-à-dire qu'elle s'écrit par blocs, où les blocs sont les matrices compagnons des invariants de similitude). On pourra remarquer au préalable que mul_x est $K(x)$-linéaire, et qu'en tant qu'endomorphisme de $K(x)$-espace vectoriel, c'est une homothétie.