**Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012**
**Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base**

## Feuille d'exercices 7 : indications de solutions

**Exercice 1 -** Utiliser le fait que $f$ est trigonalisable (resp. diagonalisable) si et seulement si son polynôme minimal est scindé (resp. scindé à racines simples) dans $K[X]$, et remarquer que le polynôme minimal de $f_W$ divise celui de $f$ (en effet ce dernier annule $f$, donc annule $f_W$).

**Exercice 2 - 1** : on raisonne par récurrence sur $\dim V$, en supposant le résultat établi en toute dimension $< \dim V$. Si tout élément de $S$ est une homothétie, il n'y a rien à démontrer (toute base convient). Sinon, soit $f \in S$ qui n'est pas une homothétie. Alors $V = \bigoplus_{i-1}^{r} V_i$ où les $V_i$ sont les sous-espaces propres pour $f$ (donc non nuls), et où $r \geq 2$ (sinon $f$ serait une homothétie). En particulier $\dim V_i < \dim V$ pour chaque $i$. De plus, tout $g \in S$ commute avec $f$ donc laisse stable chaque $V_i$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à chaque $V_i$ muni de la « restriction » $S_i$ de $S$, et l'on concatène les bases obtenues.

**2** : on procède encore par récurrence, mais l'argument est un peu plus délicat. On commence par montrer que si $V \neq \{0\}$, alors il y a un $e_1 \neq 0$ dans $V$ qui est vecteur propre de tout élément de $S$ (raisonner comme dans la question **1**). Chaque $f \in S$ induit alors un endomorphisme $\overline{f}$ de $\overline{V} := V/\mathrm{Vect}(e_1)$, qui est encore trigonalisable (même argument de polynôme minimal que dans l'exercice précédent), d'où un ensemble $\overline{S}$ d'endomorphismes de $\overline{V}$ qui commutent entre eux. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\overline{V}$ qui trigonalise $\overline{S}$. On choisit arbitrairement des $e_i \in V$ $(i \geq 2)$ relevant les $\varepsilon_i$, et l'on vérifie que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $V$ qui trigonalise $S$.

**Exercice 3 -** Le polynôme caractéristique de $M$ est scindé dans $K[X]$. Il en est donc de même du polynôme minimal, qui le divise. D'autre part ce dernier n'a que des racines simples dans $L$, donc aussi dans $K$ (on utilise le fait que le polynôme minimal ne change pas lorsqu'on passe de $\mathrm{M}_n(K)$ à $\mathrm{M}_n(L)$).

**Exercice 4 -** Notons $\mathrm{Pcar}(u)$ et $\mathrm{Pmin}(u)$ le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un endomorphisme $u$. Pour l'assertion « si », on remarque que si $f$ est diagonalisable, $F$ est l'ensemble des endomorphismes $u$ vérifiant $\mathrm{Pcar}(u) = \mathrm{Pcar}(f)$ et $\mathrm{Pmin}(f)(u) = 0$. Or l'application $u \mapsto \mathrm{Pmin}(f)(u)$ de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ dans $\mathbb{C}$ est évidemment continue ; et il en est de même de $u \mapsto \mathrm{Pcar}(u)$ à valeurs dans l'espace des polynômes complexes de degré $\leq \dim(V)$, identifié à $\mathbb{C}^{\dim(V)+1}$.

Pour la partie « seulement si » on suggère de traiter d'abord le cas de la matrice $A := \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{C}$ quelconque) : on remarquera que les matrices $A_\lambda := \begin{pmatrix} a & \lambda \\ 0 & a \end{pmatrix}$ sont des conjuguées de $A$, *sauf pour* $\lambda = 0$ : ceci implique que $F$ n'est pas fermé. On s'inspirera de cet argument dans le cas général, en utilisant par exemple la réduction de Jordan.

**Exercice 5 - 2** : appliquer la question 1 avec $A = K[X]$ et $M = V_u$, en remarquant que $\mathrm{Ann}_M(Q) = \mathrm{Ker}\, Q(u)$ pour tout $Q \in K[X]$.

**Exercice 6 -** **1** : $(-1)\oplus J_4(1)$ ; $(-1)\oplus(1)\oplus J_3(1)$ ; $(-1)\oplus(1)\oplus(1)\oplus J_2(1)$ ; $(-1)\oplus J_2(1)\oplus J_2(1)$ ; $\mathrm{diag}(-1;1;1;1;1)$. (Notations du cours pour les matrices de Jordan).

**2** : $(2)\oplus(2)\oplus J_3(2)$ ; $J_2(2)\oplus J_3(2)$.

**Exercice 7 -** **1** : pour $A$, les invariants sont $(X-1), (X-1)(X-2)(X-4)(X-6)(X-8)$, le polynôme minimal est $(X-1)(X-2)(X-4)(X-6)(X-8)$.
Pour $B$, les invariants sont $(X-7), (X-7)^2(X-1)^3$, le polynôme minimal est $(X-7)^2(X-1)^3$.

**Exercice 8 -** 4 si $K=\mathbb{Q}$, 8 si $K=\mathbb{R}$, 16 si $K=\mathbb{C}$. Posons $P=(X^2+1)^2(X^2-3)^2$ : dans chaque cas, les suites des facteurs invariants possibles sont (à association près) la suite $(P)$ et les suites de la forme $(P_1, P/P_1)$ où $P_1$ n'est pas constant et $P_1^2$ divise $P$.

**Exercice 9 -** La suite des facteurs invariants de $A$ est $\big(X+i;(X+i)(X-i)^2\big)$ ; celle de $B$ est $\big((X+i)^2(X-i)^2\big)$, c'est-à-dire $\big((X^2+1)^2\big)$. Donc c'est oui pour $B$, et non pour $A$.

**Exercice 10 -** Soient $M$ le polynôme minimal, et $C$ le polynôme caractéristique. En dimension quelconque, on peut remarquer que si $\deg M = \deg C$ alors la suite des facteurs invariants est $(M)$ ; à l'opposé, si $\deg M = 1$ alors l'endomorphisme est l'homothétie correspondant à la racine de $M$. Ceci règle les questions 1 et 2, sauf en dimension 3 si $M$ est de degré 2 : mais dans ce cas la suite des facteurs invariants ne peut être que $(C/M;M)$.

Contre-exemple en dimension 4 : les endomorphismes de facteurs invariants $(X^2;X^2)$ et $(X;X;X^2)$.

**Exercice 11 -** Si $A$ est un anneau commutatif et $M$ un $A$-module, on a un morphisme d'anneaux canonique $h_{A,M} : A \to \mathrm{End}_A(M)$, dont le noyau est $\mathrm{Ann}_A(M)$.

Dans le cas particulier où $A=K[X]$ et $M=V_f$, l'image est le sous-anneau $K[f] \subset \mathrm{End}_K(V)$ des « polynômes en $f$ », alors que $\mathrm{End}_A(M)$ est le commutant de $f$ dans $\mathrm{End}_K(V)$. La condition (ii) signifie donc que $h_{K[X],V_f}$ est surjectif. Remarquer aussi que $\mathrm{Ann}_A(M)$ est l'idéal engendré par le polynôme minimal $\mathrm{Pmin}_f$ de $f$.

Dans le cas général, il est immédiat que $h_{A,M}$ est surjectif lorsque $M$ est engendré par un élément (un endomorphisme de $M$ est complètement déterminé par l'image d'un générateur de $M$). Ceci montre que (i) implique (ii).

Réciproquement, si $V$ n'est pas cyclique on peut écrire, d'après le théorème de structure, $V_f \cong C\oplus W$ (isomorphisme de $K[X]$-modules) où $C=K[X]/(\mathrm{Pmin}_f)$ et où $W$ est un $K[X]$-module non nul. Montrons que le projecteur $p : V \to W$ sur $W$ de noyau $C$ (qui est bien dans le commutant de $f$) n'est pas dans $K[f]$. Supposons $p=Q(f)$ : alors $p$ s'annule sur $C$ donc $\mathrm{Pmin}_f$ divise $Q$, donc $p=Q(f)=0$, contradiction avec l'hypothèse $W\neq 0$.