Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Évaluation des exercices :

[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.
[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 7

Réduction des endomorphismes : quelques révisions

[S] **Exercice 1 -** Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie, f un K-endomorphisme de V, $W \subset V$ un sous-espace stable par f. On note f_W la restriction de f à W, vue comme endomorphisme de W.

1 - Si f est diagonalisable, montrer que f_W est diagonalisable.

2 - Si f est trigonalisable, montrer que f_W est trigonalisable.

[S] **Exercice 2 -** Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie, S un ensemble de K-endomorphismes de V commutant deux à deux.

1 - On suppose que tout élément de S est diagonalisable. Montrer que S est diagonalisable (il existe une base de V qui diagonalise tous les éléments de S).

2 - Même question pour « trigonalisable ».
(Indication : utiliser l'exercice **1**).

Exercice 3 - Soient L un corps, K un sous-corps de L, et $M \in \mathrm{M}_n(K)$. On suppose que M est trigonalisable dans $\mathrm{M}_n(K)$ et diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(L)$. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(K)$.

Exercice 4 - (Caractérisation topologique de la diagonalisabilité) Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de V. On pose $F = \{gfg^{-1},\, g \in \mathrm{GL}(V)\}$. Montrer que F est fermé dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ si, et seulement si, f est diagonalisable.

Exercice 5 - Soient A un anneau commutatif et M un A-module. Pour tout $\alpha \in A$, on note $\mathrm{Ann}_M(\alpha) \subset M$ (annulateur de α dans M) le sous-module de M noyau de la multiplication par α.

[S] **1 -** Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ étrangers deux à deux. Montrer que

$$\mathrm{Ann}_M\left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}_M(\alpha_i).$$

[S] **2 -** En déduire le « lemme de décomposition des noyaux » : soient K un corps, V un K-espace vectoriel, $u \in \mathrm{End}_K(V)$, $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ premiers entre eux deux à deux et P leur produit : alors $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker P_i(u)$.

Invariants de similitude

Exercice 6 -

1 - Déterminer toutes les classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ de polynôme caractéristique $(X^2-1)(X-1)^3$. (On donnera un élément par classe.)

2 - Déterminer toutes les classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ de polynôme minimal $(X-2)^3$. (On donnera un élément par classe.)

Exercice 7 - Donner la liste des invariants de similitude, ainsi que le polynôme minimal, des matrices de $\mathrm{M}_6(\mathbb{Q})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 & 13 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 - Déterminer le nombre de classes de similitude d'endomorphismes de K^8 de polynôme caractéristique $(X^2+1)^2(X^2-3)^2$, lorsque $K=\mathbb{Q}$, lorsque $K=\mathbb{R}$ et lorsque $K=\mathbb{C}$.

Exercice 9 - (Matrices semblables) Pour chacune des deux matrices complexes suivantes, déterminer si elle est semblable à une matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 - (Similitude en petite dimension) Soient K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$.

1 - On suppose que $d \leq 2$. Montrer que deux endomorphismes de V sont semblables si et seulement s'ils ont même polynôme minimal.

2 - On suppose que $d = 3$. Montrer que deux endomorphismes de V sont semblables si et seulement s'ils ont mêmes polynômes minimal et caractéristique.

3 - Le résultat de la question précédente est-il vrai lorsque $d \geq 4$?

Exercice 11 - (Commutant) Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de V. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'espace V est cyclique pour f ;

(ii) tout endomorphisme de V commutant avec f est un polynôme en f.