Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 6 : indications de solutions

Exercice 2 - **1** : on a $5x = 0$ donc $x = 6x = 3 \times 2x$. **2** : avec l'indication de l'énoncé, on trouve que $P(0) = Q(0) =: \varepsilon \in \{-1, +1\}$, et que d'autre part $P = m + 5XP_1$ avec $m \in \mathbb{Z} \setminus 5\mathbb{Z}$ et $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$. Ce n'est possible que si $m = \varepsilon$ donc l'image de P dans A est celle de ε. **3** : conséquence immédiate de **1** et **2**.

Exercice 4 - Le théorème s'applique puisque tout corps est un anneau principal.

Exercice 5 - **1** : on trouve $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, seule solution au signe près. On y parvient soit par calcul direct, soit en remarquant que $D = \mathrm{diag}(\alpha; \beta)$ où $\alpha | \beta$, $\alpha\beta = \det A = -27$, et où l'idéal (α, β) de $\mathbb{Z}$ est celui engendré par les coefficients de A, ce qui donne $\mathrm{PGCD}(\alpha, \beta) = \mathrm{PGCD}(69, -153, 12, -27) = \pm 3$.
2 : on trouve $D = \mathrm{diag}(1; -2; 16)$ (des changements de signes sont possibles, avec la contrainte que le produit doit être négatif), et par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 13 & -2 & 0 \\ 31 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & 21 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver P et Q, on applique l'algorithme du cours à B, et l'on observe que le résultat des opérations élémentaires sur les colonnes (resp. sur les lignes) à une matrice quelconque M est $M \mapsto MQ$ (resp. PM). Il suffit donc, pour trouver P et Q d'appliquer ces opérations à la matrice identité. Et on vérifie le résultat...

Exercice 6 - « Si » : on peut développer le déterminant par rapport à la première ligne. « Seulement si » : la matrice ligne $L := (a_1 \ldots a_n)$ peut s'écrire $L = PDQ$ où $P \in \mathrm{SL}_1(A) = \{1\}$, $Q \in \mathrm{SL}_n(A)$, $D = (\lambda\ 0 \ldots 0)$. Comme L et D ont même PGCD des coefficients (l'idéal engendré par les mineurs d'ordre 1 est invariant), l'hypothèse sur les a_i entraîne que λ est inversible. Quitte à multiplier Q par $\mathrm{diag}(\lambda^{-1}; \lambda; 0; \ldots; 0)$ on peut donc supposer que $\lambda = 1$ (on utilise le fait que $n \geq 2$!). La relation $LQ = D$ signifie que L est la première ligne de Q.

Exercice 7 - D'abord une remarque sur le déterminant : si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de M, on peut considérer l'entier $\det_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ de la matrice de f dans les bases en question. Si $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ c'est simplement le déterminant de f ; en général, c'est le produit de $\det(f)$ par le déterminant de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Comme celui-ci vaut ± 1, on en déduit que $|\det_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)|$ est indépendant des bases. On peut donc supposer que la matrice de f est diagonale (de Smith), soit $D = \mathrm{diag}(a_1; \ldots; a_n)$. Il est clair que f est injectif si et seulement si tous les a_i sont non nuls. D'autre part l'image de f est alors $\prod_{i=1}^n a_i\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^n$, qui est d'indice fini sous la même condition ; en outre, si c'est le cas, le quotient $\mathbb{Z}^n/\mathrm{im}(f)$ (ou conoyau de f, cf. feuille 3, exercice 7) est isomorphe à $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$ donc est d'ordre $\prod_{i=1}^n |a_i| = |\det(f)|$.

Exercice 8 - **1** : les colonnes de P représentent une base $(v_1, \ldots, v_n)$ adaptée à N, et la partie non nulle $(d_1, \ldots, d_s)$ de la diagonale de D donne les coefficients correspondants, c'est-à-dire que $(d_1 v_1, \ldots, d_s v_s)$ est une base de N.

2 : on peut prendre la base $(v_1 = (1,1), v_2 = (1,0))$ (et $(v_1, 2v_2)$ est une base de N ; noter que les « deux » conditions définissant N sont les mêmes).

3 : une solution : $\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{4}, (1,0,1)\right)$. C'est un peu trop facile…