Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Évaluation des exercices :

[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.
[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 6

Par défaut, les anneaux sont commutatifs et A désigne un anneau.

Anneaux intègres, divisibilité

[E] **Exercice 1 -** Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions (on pourra penser à l'exemple $A = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$). Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on considère $E := A^n$ comme sous-A-module de $V := K^n$; ce dernier est à la fois un A-module et un K-espace vectoriel.

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\underline{v} := (v_1, \ldots, v_p) \in E^p$. On note $F \subset E$ le sous-A-module engendré par $\underline{v}$. Montrer les implications :

1 - $\underline{v}$ est A-libre dans $E \Leftrightarrow \underline{v}$ est A-libre dans $V \Leftrightarrow \underline{v}$ est K-libre dans V.

2 - $\underline{v}$ est A-génératrice dans $E \Rightarrow \underline{v}$ est K-génératrice dans $V \Leftrightarrow$ il existe $d \neq 0$ dans A tel que $dE \subset F$.

[E] **Exercice 2 -** Soit A l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(5X)$. On note x la classe de X dans A.

1 - Montrer que x et $2x$ sont multiples l'un de l'autre.

2 - Montrer que $A^\times = \{-1, +1\}$. (On pourra partir d'une relation dans $\mathbb{Z}[X]$ de la forme $PQ = 1 + 5XH$: on remarque que $P(0) = Q(0) = \pm 1$ et d'autre part on réduit modulo 5 et on observe que $\mathbb{F}_5[X]^\times = \mathbb{F}_5^\times$).

3 - Montrer que $2x$ n'est pas « associé » à x (il n'est pas de la forme ux, $u \in A^\times$).

Anneaux principaux et factoriels

[S] **Exercice 3 -** Soit A un anneau factoriel, et soit K son corps des fractions. On fixe un système représentatif d'irréductibles $\Sigma \subset A$. Tout élément z de K^* s'écrit de manière unique

$$z = \varepsilon(z) \prod_{p \in \Sigma} p^{v_p(z)}, \quad \varepsilon(z) \in A^\times, (v_p(z))_{p\in\Sigma} \in \mathbb{Z}^{(\Sigma)}.$$

On pose, par convention, $v_p(0) = +\infty$ pour tout $p \in \Sigma$.

1 - Montrer que, pour $z \in A$ et $p \in \Sigma$, on a $v_p(z) = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid p^m \text{ divise } z \text{ dans } A\}$. En déduire que la fonction $v_p : K^* \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ ne dépend que de l'idéal pA et non du choix de Σ.

2 - Pour $p \in \Sigma$ fixé, montrer que $v_p : K^* \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ vérifie les propriétés suivantes (avec les conventions habituelles pour l'addition et l'ordre dans $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$) :

$$\text{(i) } v_p(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0; \quad \text{(ii) } v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y); \quad \text{(iii) } v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

et que l'on a égalité dans (iii) si $v_p(x) \neq v_p(y)$. Montrer que $z \in A$ si et seulement si $v_p(z) \geq 0$ pour tout p.

3 - On fixe $p \in \Sigma$ et un réel $e > 1$. Pour $z \in K$ on définit la « valeur absolue » $|z|_p$ par $|z|_p = e^{-v_p(z)} \in \mathbb{R}_+$ (avec la convention $e^{-\infty} = 0$). Que donnent les formules de la question **2** en termes de cette fonction ?

Montrer que $(x-y) \mapsto |x-y|_p$ est une distance sur K, pour laquelle la suite $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que pour cette distance, tout triangle est isocèle (utiliser la formule (iii) de la question **2**).

Matrices sur un anneau principal, forme normale de Smith

[E] **Exercice 4 -** Le théorème de réduction à la forme de Smith s'applique-t-il lorsque l'anneau considéré est un corps ? Que donne-t-il dans ce cas ? En donner une démonstration directe.

[S] **Exercice 5 -**

1 - Trouver une matrice diagonale de Smith D qui soit S-équivalente à la matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}.$$

2 - Trouver une matrice diagonale de Smith D et deux matrices P et Q de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ telles que $D = PBQ$, avec :

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

[S] **Exercice 6 -** (Lignes des matrices de $\mathrm{SL}_n(A)$) Soient A un anneau principal, n un entier ≥ 2, et $(a_1, \cdots, a_n) \in A^n$. Montrer que $a_1, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux (dans leur ensemble) si et seulement s'il existe une matrice $M \in \mathrm{SL}_n(A)$ dont la première ligne est $(a_1, \cdots, a_n)$. (On pourra utiliser la forme normale de Smith.)

[S] **Exercice 7 -** (Indice et déterminant) Soient M un groupe abélien libre de rang n et f un endomorphisme de M. Montrer que le sous-groupe $f(M)$ est d'indice fini si, et seulement si, f est injectif, et que dans ce cas l'indice est égal à $|\det(f)|$. (On rappelle que l'indice d'un sous-groupe est le cardinal du quotient du groupe par ce sous-groupe.)

Exercice 8 - (Bases adaptées)

1 - Soient A un anneau principal, $n \in \mathbb{N}^*$, et N un sous-A-module de A^n engendré par des vecteurs $v_1, \ldots, v_r$. On note M la matrice de taille $n \times r$ dont la j-ième colonne est la transposée du vecteur v_j. Si $M = PDQ^{-1}$ est sous forme normale de Smith, que représentent les colonnes de la matrice P, ainsi que les coefficients diagonaux de D ?

2 - Donner une base de $\mathbb{Z}^2$ adaptée au sous-module suivant : $N = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ (a+b) \text{ et } (a-b) \text{ sont pairs}\}$.

3 - Même question avec $\mathbb{Z}^3$ et le sous-module engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 6, -8)$ et $v_2 = (-4, 4, -12)$.