Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 4 : indications de solutions

Exercice 2 - Il suffit de trouver n entiers premiers entre eux, tels que $n-1$ quelconques d'entre eux ne soient jamais premiers entre eux. Exemple pour $n=3$: $\{2\times 3, 3\times 5, 2\times 5\}$.

Exercice 3 - Noter que la condition $x+y\equiv 0 \pmod 2$ est superflue. Exemple d'une base : $((1,1),(0,4))$. Comme M est le noyau du morphisme $(x,y)\mapsto (x+y \bmod 2, x-y \bmod 4)$ de $\mathbb{Z}^2$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, le quotient $\mathbb{Z}^2/M$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ donc est fini (il est d'ailleurs facile de voir qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).

Exercice 4 - (i) faux (vrai si f injective) ; (ii) vrai ; (iii) faux (vrai si f surjective) (iv) faux (vrai si f injective). Si $f(\underline{v})$ (sans hypothèse sur $\underline{v}$) est génératrice, alors f est surjective. Si M a une base dont l'image est libre, alors f est injective.

Exercice 5 - On trouve les matrices n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls dans chaque colonne (pas de restriction sur les lignes).

Exercice 6 - 1 : supposant que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i+\sum_{j=1}^{q}\mu_j w_j=0$, on applique π à cette formule et on en déduit que les μ_j sont nuls, puis (vu l'hypothèse sur $\underline{v}$) que les λ_i sont nuls.
2 : si $x\in M$, écrire $\pi(x)$ comme combinaison linéaire des $\pi(w_j)$ dans M/N, interpréter le résultat dans M, et appliquer l'hypothèse sur $\underline{u}$.

Exercice 7 - 1 : M est une partie génératrice de M. **3** : remarquer que deux éléments de A ne sont jamais linéairement indépendants, et qu'un élément a est une famille libre si et seulement si il est régulier. **4** : dans l'anneau $A=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, considérer l'idéal $2A$. (On peut aussi donner un exemple d'idéal non principal). **5** : les anneaux principaux.

Exercice 9 - 2 : d'après le cours, si M/N est libre, M est isomorphe à $N\oplus(M/N)$.

Exercice 10 - 3 : on suggère d'utiliser l'exercice 8. **4** : soit $f: V\to W$ A-linéaire. Il s'agit de voir que $f(\frac{a}{b}x)=\frac{a}{b}f(x)$ si $x\in V$, $a\in A$ et $b\in A^*$, la difficulté étant de n'utiliser que la *A-linéarité* de f. On suggère de multiplier les deux membres par b.

Exercice 11 - 2 : non (il manque le symétrique pour l'addition).

Exercice 12 - 1 : on utilise le fait que si $x\in M$ est annulé par $\alpha\in A^*$ et y par $\beta\in A^*$, alors $x+y$ est annulé par $\alpha\beta$, *qui n'est pas nul si A est intègre*. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les éléments « de torsion » (pourquoi les guillemets ?) sont 0, 2, 3 et 4 qui ne forment pas un idéal.
4 : si M n'est pas fidèle, il est de torsion. **5** : $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion et fidèle, et n'est pas sans torsion.
7 : (i)(ii)(iii) vrai ; (iv) faux ; (v) faux (le module nul !) ; (vi) vrai pour les sommes directes et (donc) pour les produits finis ; faux pour les produits infinis (exemple : le $\mathbb{Z}$-module $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). (vii) vrai.

Exercice 13 - **3** : soit G une partie génératrice de M et soit F une partie génératrice finie. Chaque élément x de F est dans le sous-module engendré par une partie *finie* G_x de G. Donc le sous-module engendré par la partie (finie) $\bigcup_{x\in F} G_x$ contient F, et est donc égal à M. et **6** : utiliser la question **3**. **5** : utiliser la question **4** (par exemple). **7** : utiliser l'exercice **6**. **8** : le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Q}$ engendré par $r_1, \ldots, r_m$ est contenu dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ où d est un dénominateur commun des r_i. Il n'est donc pas égal à $\mathbb{Q}$ (il ne contient pas $1/2d$, par exemple). Pour $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ utiliser la question **7**.

Exercice 14 - **1** : copier l'argument de la question **8** de l'exercice **13**. **3** : si M est engendré par n éléments et annulé par l'entier $d \neq 0$, il est isomorphe à un quotient de $\mathbb{Z}^n/d\mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n$.