Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 3 : indications de solutions

Exercice 1 - Soit N le nilradical de A. Il est immédiat que N est contenu dans tout idéal premier de A. Réciproquement, soit $x \in A$ non nilpotent : il s'agit de trouver un idéal premier de A ne contenant pas x. Par hypothèse, l'ensemble $S = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne contient pas 0. Soit X l'ensemble, ordonné par inclusion, des idéaux I de A tels que $I \cap S = \emptyset$. Alors X n'est pas vide (il contient l'idéal nul) et on vérifie immédiatement qu'il est inductif. D'après le théorème de Zorn, il admet donc un élément maximal P. Il est clair (puisque $P \in X$) que P est un idéal de A et que $x \notin P$.

Il reste à voir que P est premier. Comme $x \notin P$, P est un idéal strict. Soient a et b dans $A \setminus P$, et montrons que $ab \notin P$. Comme $a \notin P$, l'idéal (P, a) engendré par $\{a\} \cup P$ contient strictement P. Vu le caractère maximal de P, il rencontre donc S ; il existe une relation $x^m = \alpha + ua$ avec $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in P$ et $u \in A$. De même, puisque $b \notin P$, on a une relation $x^n = \beta + vb$ ($\beta \in P$, $v \in A$). En multipliant, on trouve $x^{m+n} = \alpha\beta + \alpha vb + \beta ua + uvab$. Le premier membre n'appartient pas à P, alors que les trois premiers termes du second membre sont dans P. On en déduit que $uvab \notin P$, et a fortiori $ab \notin P$.

Exercice 2 - **1** : vrai ; **2** : faux (exemple : $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $J = \{0\}$).

Exercice 3 - Module à gauche : les multiplications à droite $x \mapsto x\alpha$. Module à droite : les multiplications à gauche $x \mapsto \alpha x$ ($\alpha \in A$).

Exercice 4 - Un morphisme $f : A \to M$ est déterminé par $f(1)$: on a $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in A$. Inversement tout élément $z \in M$ est l'image de 1 par le morphisme $x \mapsto xz$ de A dans M. On a donc un isomorphisme de groupes $\mathrm{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{\sim} M$ donné par $f \mapsto f(1)$.

Exercice 5 - **1** : l'annulateur de M est le noyau du morphisme de A dans $\mathrm{End}(M, +)$ envoyant $\lambda \in A$ sur la multiplication par λ dans M. **2** : $(N : M)$ est l'annulateur de M/N.

Exercice 6 - **1** : pour $A = \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}$, et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^*$ et $\mathbb{Q}^*$ sont nuls. Pour $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. **2** : on a $\lambda\varphi = \lambda \bullet \varphi$ mais ce n'est pas en général un élément de M^* (c'est un morphisme de groupes de $(M, +)$ dans $(A, +)$ qui n'est pas A-linéaire en général). Dans la recette (iv), $x\lambda$ n'a pas de sens. La recette (iii) donne une structure de A-module *à droite* sur M^*.

Exercice 7 - **1** : les surjections. **2** : à $g : E \to \mathrm{Ker}\, f$, on associe le composé $E \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow M$. **3** : à $g : \mathrm{Coker}\,(f) \to E$ on associe le composé $M \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\,(f) \xrightarrow{g} E$ où $\twoheadrightarrow$ désigne la surjection canonique.

Exercice 8 - **1** : fixer $x \neq 0$ dans M et considérer $\varphi : A \to M$ donné par $\varphi(\alpha) = \alpha x$. **2** : si E est un $\mathbb{Z}$-module quelconque et si $\varphi : \mathbb{Q} \to E$ est $\mathbb{Z}$-linéaire, remarquer que $\varphi(1)$ est divisible par tout entier $d > 0$, i.e. appartient à $\bigcap_{d>0} dE$. Il reste à montrer que si Q est un quotient de $\mathbb{Z}$ on a $\bigcap_{d>0} dQ = \{0\}$.

Exercice 9 - **2** : $\dim_{\mathbb{R}} \rho_* E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$ (même en dimension infinie). **3** (ii) : il s'agit de voir que toute application A-linéaire $\varphi : E \to F$ entre deux B-espaces vectoriels est B-linéaire. Commencer par montrer que $f(\frac{1}{\alpha} x) = \frac{1}{\alpha} f(x)$ pour α non nul dans A et $x \in E$, puis utiliser le fait que tout élément de B est un quotient d'éléments de A. **4** : utiliser la question 2.