Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Évaluation des exercices :

[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.
[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 3

[S] **Exercice 1 -** Soient A un anneau commutatif. Montrer que le nilradical de A (cf. feuille 2, exercice 14) est l'intersection des idéaux premiers de A.

[Indication : si $x \in A$ n'est pas nilpotent, poser $S = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et considérer l'ensemble des idéaux I de A tels que $I \cap S = \emptyset$.]

[S] **Exercice 2 -** Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs, et soit J un idéal de B. Vrai ou faux :

1 - si J est premier, $f^{-1}(J)$ est premier ;

2 - si J est maximal, $f^{-1}(J)$ est maximal.

[E] **Exercice 3 -** Soit A un anneau. Quels sont les endomorphismes du A-module à gauche A ? du A-module à droite A ?

[E] **Exercice 4 -** Soient A un anneau et M un A-module à gauche. Décrire $\mathrm{Hom}_A(A, M)$.

[E] **Exercice 5 -** Soient A un anneau, M un A-module à gauche, N un sous-module de M.

1 - L'*annulateur* de M, noté $\mathrm{Ann}_A(M)$, est l'ensemble des $a \in A$ tels que $aM = \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Ann}_A(M)$ est un idéal bilatère de A, de deux manières : en appliquant directement les définitions, et en interprétant $\mathrm{Ann}_A(M)$ comme le noyau d'un morphisme d'anneaux.

2 - Montrer que $(N : M) := \{a \in A \mid aM \subset N\}$ est un idéal bilatère de A, de deux manières : directement, et en appliquant la question précédente.

[E] **Exercice 6 -** Soient A un anneau et M un A-module à gauche. Le *dual* (A-linéaire) de M est par définition le groupe abélien $M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

1 - Pour $A = \mathbb{Z}$, quel est le dual de $\mathbb{Z}$? de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? de $\mathbb{Q}$? Pour $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quel est le dual de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

2 - On voudrait munir M^* d'une structure de A-module ; pour cela on propose les quatre recettes suivantes :

(i) à $\varphi \in M^*$ et $\lambda \in A$ on associe $\lambda\varphi : M \to A$ donné par $x \mapsto \lambda\varphi(x)$;
(ii) à $\varphi \in M^*$ et $\lambda \in A$ on associe $\lambda \bullet \varphi : M \to A$ donné par $x \mapsto \varphi(\lambda x)$;
(iii) à $\varphi \in M^*$ et $\lambda \in A$ on associe $\varphi\lambda : M \to A$ donné par $x \mapsto \varphi(x)\lambda$;
(iv) à $\varphi \in M^*$ et $\lambda \in A$ on associe $\varphi \bullet \lambda : M \to A$ donné par $x \mapsto \varphi(x\lambda)$;

Ces recettes ont-elles toutes un sens ? Sont-elles vraiment différentes ? Lesquelles donnent bien une structure de A-module sur M^* ? De quel bord politique ?

[ES] **Exercice 7 -** Soient A un anneau et $f : M \to N$ un morphisme de A-modules à gauche. Le *conoyau* de f est par définition le A module

$$\mathrm{Coker}\,(f) := N/\mathrm{Im}\,(f).$$

1 - Quels sont les applications A-linéaires dont le conoyau est nul ?

2 - Pour tout A-module E, définir un isomorphisme naturel de groupes

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Ker}\,(f)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{Hom}_A(E,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(E,N)\big) \\ h & \longmapsto & f \circ h. \end{array}$$

3 - Pour tout A-module E, définir un isomorphisme naturel de groupes

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}\,(f), E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{Hom}_A(N,E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,E)\big) \\ h & \longmapsto & h \circ f. \end{array}$$

[E] **Exercice 8 -** Soient A un anneau et M un A-module à gauche non nul.

1 - Montrer qu'il existe un idéal à gauche $I \subsetneqq A$ et un morphisme *injectif* de A/I dans M.

2 - Montrer qu'il n'existe aucune application $\mathbb{Z}$-linéaire non nulle de $\mathbb{Q}$ vers un quotient de $\mathbb{Z}$.

Exercice 9 - (« restriction des scalaires ») Soit $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

[E] **1 -** Pour tout B-module à gauche E, montrer que la loi externe

$$\begin{array}{ccc} A \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \rho(\lambda)x \end{array}$$

munit E d'une structure de A-module à gauche, qui sera noté $\rho_*(E)$; montrer que toute application B-linéaire $E \to F$ est une application A-linéaire $\rho_*E \to \rho_*F$. Montrer que ρ_*E est annulé par l'idéal $\mathrm{Ker}\,\rho$.

[E] **2 -** On prend pour ρ l'inclusion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, expliciter le $\mathbb{R}$-espace ρ_*E ; montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $(e_1, i\,e_1, \ldots, e_n, i\,e_n)$ est une base de ρ_*E. Quelle est la dimension de ρ_*E ? Que se passe-t-il pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie ?

3 - (retour au cas général) Si E et F sont deux B-modules, on a un morphisme injectif de groupes

$$j : \mathrm{Hom}_B(E,F) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(\rho_*E, \rho_*F).$$

Montrer que j est un isomorphisme dans les cas suivants :

[E] (i) ρ est surjectif ;

(ii) A est intègre, B est son corps des fractions, et ρ est l'inclusion naturelle.

Donner un exemple où j n'est pas surjectif.

[S] **4 -** Pour ρ convenable, donner un exemple d'un A-module qui n'est pas (isomorphe à un) ρ_*E.

5 - On suppose ρ surjectif, de noyau I (exemple : $B = A/I$). Montrer que les A-modules de la forme ρ_*E sont exactement ceux qui sont annulés par I.

Exercice 10 - (sections, rétractions et supplémentaires) Soit A un anneau. Pour toute application A-linéaire $f : M \to N$, on appelle *section* (sous-entendu : A-linéaire) de f une « inverse à droite » de f, c'est-à-dire un A-morphisme $s : N \to M$ tel que $f \circ s = \mathrm{Id}_N$. On appelle *rétraction* de f une « inverse à gauche » de f, c'est-à-dire un A-morphisme $r : N \to M$ tel que $r \circ f = \mathrm{Id}_M$.

[E] **1** - Montrer que si f admet une section (resp. une rétraction) elle est surjective (resp. injective). Montrer que les réciproques sont fausses.

[S] **2** - Soient E un A-module, F un sous-module de E, Q le quotient E/F. On considère les applications canoniques $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} Q$ (de sorte que j est injective et π surjective). Définir des bijections naturelles entre les trois ensembles suivants :

(i) l'ensemble des sections de π ;
(ii) l'ensemble des supplémentaires de F dans E ;
(iii) l'ensemble des rétractions de j.

[S] **3** - Avec les notations de la question précédente, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) j admet une rétraction ;
(ii) toute application A-linéaire de F dans un A-module quelconque se prolonge à E ;
(iii) pour tout A-module G, l'application naturelle (restriction à F) de $\mathrm{Hom}_A(E,G)$ dans $\mathrm{Hom}_A(F,G)$ est surjective ;
(iv) toute application A-linéaire d'un A-module quelconque dans Q se relève à E (on expliquera ce que cela signifie) ;
(v) pour tout A-module G, l'application naturelle (composition avec π) de $\mathrm{Hom}_A(G,E)$ dans $\mathrm{Hom}_A(G,Q)$ est surjective.

(Indication : pour montrer que (ii) implique (i) par exemple, considérer l'application identité de F dans F).
Montrer que si A est un corps, ces conditions sont toujours vérifiées (par suite, dans la question **1**, les réciproques sont alors vraies).