Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 2 : indications de solutions

Exercice 1 - **2** : si y est l'inverse à gauche de x, considérer xyx. **3** : toute injection (resp. surjection) d'un ensemble fini dans lui-même est une bijection. **4** : les éléments réguliers sont les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f^{-1}(0)$ soit d'intérieur vide (i.e. les fonctions qui ne sont identiquement nulles sur aucun intervalle $[a, b]$, $a < b$).

Exercice 2 - Considérer des supplémentaires du noyau et de l'image de u. En dimension finie, les six conditions sont équivalentes.

Exercice 3 - **2** : on trouve $(1-ba)^{-1} = 1+b(1-ab)^{-1}a$. Pour le vérifier, poser par exemple $u = (1 - ab)^{-1}$ et remarquer que la relation $u(1 - ab) = 1$ équivaut à $uab = u - 1$, plus facile à utiliser.

Exercice 4 - Penser aux matrices.

Exercice 5 - **1** : faux, même si f est surjectif ou injectif. (Contre-exemple avec f injectif : $A = \mathbb{Z}$, $x = 2$, $B = \mathbb{Z}[X]/(2X)$). Réciproque vraie si f est injectif. **2** : vrai, réciproque fausse même si f est surjectif (prendre B nul) ou injectif ($A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$).

Exercice 6 - **1** et **4** : l'image de $f : \mathbb{Z} \to A$ défini par $f(n) = n1_A$. **2** : $\{1\}$. **3** : A.

Exercice 7 - **1** : utiliser les idéaux de $\mathbb{Z}$. **2** : considérer le sous-groupe engendré par 1_A.

Exercice 8 - (Lois non classiques) L'anneau est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 9 - (Morphisme de Frobenius) **2** : utiliser la formule $i!\,(p-i)!\binom{p}{i} = p!$ et le « lemme d'Euclide ». **3** : pour $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on trouve l'identité.

Exercice 10 - (Endomorphismes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) **1** : le seul morphisme est l'identité. **2** et **3** : l'identité et la conjugaison complexe (considérer la restriction à $\mathbb{R}$).

Exercice 12 - (Lemme chinois) Écrire $1 = u + v$ avec $u \in I$ et $v \in J$.

Exercice 13 - (Idempotents et produits) **3** : dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\{0, 1, 4, 9\}$. Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\{0, 1\}$. **4** : l'inverse est $(u, v) \mapsto u + v$.

Exercice 14 - (Nilpotents, anneaux réduits) **3** : si $x^n = 0$ avec $n > 1$ alors $(x^{n-1})^2 = 0$. **5** : c'est l'ensemble des $(x_l)_{l\in L}$ où les x_l sont « uniformément nilpotents », i.e. tels qu'il existe $m > 0$ tel que *tous* les x_l^m soient nuls. **6** : $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; $\{0\}$. **8** : pour la stabilité par addition, la formule du binôme montre que si $x^m = y^n = 0$ ($m > 0$, $n > 0$) alors $(x + y)^{m+n-1} = 0$. **9** : utiliser la formule de la progression géométrique $(1 - z)\sum_{i=0}^{n} z^i = 1 - z^{n+1}$.

Exercice 15 - (Anneaux locaux) **1** : anneau nul : non ; corps : oui ; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: oui si (et seulement si) $n = \pm p^e$ où p est premier et $e > 0$; sous-anneau : non ; quotient : oui pour les quotients non nuls.
2 : tout élément non inversible appartient à un idéal maximal. **4** : l'idéal maximal est engendré par T (séries formelles « sans terme constant »).