Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Évaluation des exercices :
[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.
[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 2

Révisions sur les anneaux

Exercice 1 - Soient A un anneau et x un élément de A. Montrer les implications :

[ES] **1 -** x inversible à gauche $\Rightarrow$ x régulier à gauche (réciproque ?) ;

[ES] **2 -** x inversible $\Leftrightarrow$ x inversible à gauche et régulier à droite ;

[ES] **3 -** (A est supposé fini) x inversible à gauche $\Leftrightarrow$ x régulier à gauche $\Leftrightarrow$ x inversible à droite $\Leftrightarrow$ x régulier à droite.

4 - Quels sont les éléments inversibles (resp. réguliers) de l'anneau $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

[S] **Exercice 2 -** Soient K un corps, V un K-espace vectoriel, A l'anneau $\mathrm{End}_K(V)$ et u un élément de A. Montrer les équivalences :

$$\begin{array}{rcccl} u \text{ inversible à gauche} & \Leftrightarrow & u \text{ régulier à gauche} & \Leftrightarrow & u \text{ injectif;} \\ u \text{ inversible à droite} & \Leftrightarrow & u \text{ régulier à droite} & \Leftrightarrow & u \text{ surjectif.} \end{array}$$

[E] Que peut-on dire de plus si V est de dimension finie ?

Exercice 3 -

[S] **1 -** Rappeler quel est l'inverse de $(1-T)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[[T]]$ des séries formelles en T (à coefficients dans $\mathbb{Z}$).

2 - Soient A un anneau unitaire (pas forcément commutatif), et $(a, b) \in A^2$. Montrer que si $(1-ab)$ est inversible, alors $(1-ba)$ l'est également. On pourra utiliser la question précédente pour conjecturer l'inverse de $(1-ba)$ en fonction de celui de $(1-ab)$, et vérifier ensuite la conjecture.

3 - Soit A l'anneau (non commutatif) des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient a et $b \in A$ définis par $a(f) = f'$, et $b(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tous $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que ab est inversible, tandis que ba ne l'est pas.

[E] **Exercice 4 -** Donner un exemple d'anneau fini non commutatif.

Dans la suite, les anneaux sont commutatifs (sauf mention contraire).

[ES] **Exercice 5 -** Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux, et soit $x \in A$. Vrai ou faux :

1 - x régulier dans $A \Rightarrow f(x)$ régulier dans B ;

2 - x inversible dans $A \Rightarrow f(x)$ inversible dans B ;

Mêmes questions pour les implications réciproques. Mêmes questions en supposant f injectif (resp. surjectif).

[E] **Exercice 6 -** Soit A un anneau.

1 - Quel est le sous-groupe de $(A, +)$ engendré par 1 ?

2 - Quel est le sous-groupe de $(A^\times, \times)$ engendré par 1 ?

3 - Quel est l'idéal de A engendré par 1 ?

4 - Quel est le sous-anneau de A engendré par 1 ?

Exercice 7 -

[S] **1 -** Soit n un entier. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

2 - Soit A un anneau tel que tout sous-groupe de $(A, +)$ soit un idéal de A. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 8 - (Lois non classiques) On munit $\mathbb{Z}$ des deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ définies par les formules $x \oplus y = x + y + 1$ et $x \otimes y = xy + x + y$. Montrer que $(\mathbb{Z}; \oplus; \otimes)$ est un anneau. À quel anneau plus classique est-il isomorphe ?

Exercice 9 - (Morphisme de Frobenius) Soient p un nombre premier, et A un anneau tel que $p1_A = 0$.

[ES] **1 -** Montrer que $px = 0$ pour tout $x \in A$.

[S] **2 -** Montrer que les coefficients du binôme $\binom{p}{i}$ sont nuls pour $0 < i < p$.

[S] **3 -** Montrer que l'application $F : A \to A$ donnée par $F(x) = x^p$ est un endomorphisme d'anneau. Que vaut-il dans le cas où $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

[S] **Exercice 10 -** (Endomorphismes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$)

1 - Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (On pourra montrer qu'un tel morphisme fixe $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ point par point, puis qu'il est croissant).

2 - Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui commutent avec la conjugaison complexe.

3 - Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui sont continus.

Exercice 11 - (Anneaux produits) Soient L un ensemble et $(A_l)_{l \in L}$ une famille d'anneaux indexée par L. On considère l'anneau produit $A = \prod_{l \in L} A_l$.

[S] **1 -** On suppose que L est fini. Montrer que tout idéal de A est de la forme $\prod_{l \in L} J_l$ où chaque J_l est un idéal de A_l (indication : pour chaque $m \in L$, utiliser l'élément e_m dont chaque composante est nulle sauf la m-ième qui vaut 1_{A_m}).

2 - On suppose que L est infini et que tous les A_l sont non nuls. Soit J l'ensemble des $(x_l)_{l \in L} \in A$ dont toutes les composantes x_l sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que J est un idéal de A qui n'est pas un « produit » (au sens de la question précédente) d'idéaux des A_l.

[ES] **3 -** Monter que A est intègre si et seulement si un seul des A_l est intègre, les autres étant nuls.

[ES] **4 -** Montrer que A est un corps si et seulement si un seul des A_l est un corps, les autres étant nuls.

[S] **Exercice 12 -** (Lemme chinois) Soient A un anneau, I et J deux idéaux de A tels que $I + J = A$ (on dit alors que I et J sont *étrangers*). Montrer que le morphisme canonique

$\phi : A \to (A/I)\times(A/J)$ est surjectif, et que $IJ = I\cap J$. En déduire que $A/(IJ)$ et $(A/I)\times(A/J)$ sont isomorphes.

Exercice 13 - (Idempotents et produits) Un élément e d'un anneau A est *idempotent* si $e^2 = e$.

[ES] **1 -** Soit A un anneau intègre. Quels sont les idempotents de A ?

[ES] **2 -** Soit $(A_l)_{l\in L}$ une famille d'anneaux. Quels sont les idempotents de $\prod_{l\in L} A_l$? Et si tous les A_l sont intègres ?

[E] **3 -** Quels sont les idempotents de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

[S] **4 -** Si $e \in A$ est idempotent, montrer que $1-e$ est idempotent. Montrer que l'idéal eA est un anneau unitaire d'élément unité e, puis que l'application

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & eA \times (1-e)A \\ x & \longmapsto & (ex,(1-e)x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Quel est son inverse ?

Exercice 14 - (Nilpotents, anneaux réduits) Un élément x d'un anneau A est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^k = 0$. L'ensemble des éléments nilpotents de A est le *nilradical* de A, noté $\mathrm{nil}(A)$. On dit que A est réduit si $\mathrm{nil}(A) = \{0\}$.

[ES] **1 -** Montrer que tout anneau intègre est réduit.

[ES] **2 -** Montrer que tout sous-anneau (unitaire ou non) d'un anneau réduit est réduit.

[ES] **3 -** Montrer qu'un anneau A est réduit si et seulement si tout élément de A de carré nul est nul.

[ES] **4 -** Montrer qu'un produit $A = \prod_{l\in L} A_l$ d'anneaux est réduit si et seulement si tous les A_l sont réduits.

[E] **5 -** Plus généralement, quel est le nilradical de $A = \prod_{l\in L} A_l$?... Sûr ?

[ES] **6 -** Quel est le nilradical de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

[S] **7 -** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est réduit si et seulement si n est sans facteur carré.

[S] **8 -** Montrer que $\mathrm{nil}(A)$ est un idéal de A, et que $A/\mathrm{nil}(A)$ est réduit.

[S] **9 -** Si $u \in A^\times$ et $x \in \mathrm{nil}(A)$, montrer que $u + x \in A^\times$. (Indication : traiter d'abord le ca $u = 1$).

Exercice 15 - (Anneaux locaux) Un anneau A est dit *local* s'il possède un unique idéal maximal.

1 - Un anneau nul est-il local ? Un corps est-il local ? À quelle condition sur $n \in \mathbb{N}$ l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il local ? Est-ce que tout sous-anneau d'un anneau local est local ? Est-ce que tout quotient d'un anneau local est local ?

2 - Si A est local d'idéal maximal J, montrer que $A^\times = A \setminus J$.

3 - Réciproquement, soit A un anneau tel que $A \setminus A^\times$ soit un idéal de A. Montrer que A est local.

4 - Soit K un corps. Montrer que l'anneau des séries formelles $K[[T]]$ est local.