Année universitaire 2011-2012
Master 1 de mathématiques
Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 1 : indications de solutions

Relations d'équivalence

Exercice 1. 1 : non ; oui. 2 : non ; oui. 3 : oui ; oui. 4 : oui ; non. 5 : oui (remarquer que x^y est de même parité que x).

Révisions sur les groupes

Exercice 2. Notons $*$ la loi de G : alors la loi $\bullet$ sur E est donnée par la formule $x \bullet y := f^{-1}(f(x) * f(y))$, où $f^{-1} : G \to E$ est la bijection réciproque de f. Dans l'exemple, on trouve $x \bullet y = x + y + 1$.

Exercice 3. 1 : oui. 2 : oui. 3 : non. 4 : oui. 5 : oui.

Exercice 4. 3 : penser au groupe trivial.

Exercice 5. C'est clair si $H = \{0\}$. Sinon, H a un plus petit élément strictement positif r (pourquoi ?). Pour montrer qu'un élément x de H est multiple de r, utiliser la division euclidienne.

Exercice 6 (Ordre d'un élément)**.** 1 : l'ordre est ∞ dans $(\mathbb{Q}, +)$ et 2 dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$. 2 : soit r l'ordre de g. Le noyau est $\{0\}$ si $m = +\infty$, et $r\mathbb{Z}$ sinon. 3 : remarquer qu'en vertu de la question 2, on a $g^m = e$ si et seulement si m est *multiple* de l'ordre de g. 4 : l'ordre est $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(a,n)}$.

Exercice 7 (Groupe des homomorphismes)**.** 2 : il suffit que A soit commutatif. 3 : à un morphisme $f : \mathbb{Z} \to A$, associer $f(1) \in A$. Dans l'autre sens, à un élément α de A associer $f_\alpha : \mathbb{Z} \to A$ défini par $f_\alpha(n) = \alpha^n$ (A étant noté multiplicativement). Si A est abélien, la bijection est un isomorphisme de groupes. 4 : par la propriété universelle du quotient, on a une bijection entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A)$ et le sous-groupe de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ formé des morphismes dont le noyau contient $n\mathbb{Z}$. 5 : c'est le sous-groupe engendré par la classe de l'entier $\frac{m}{\mathrm{pgcd}(m,n)}$.

Exercice 9 (Centre d'un groupe)**.** 2 : si G/Z est engendré par la classe de $\gamma \in G$, remarquer que tout $x \in G$ est de la forme $\gamma^m z$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $z \in Z$.

Exercice 10 (Conjugaison, automorphismes intérieurs)**.** 2 : le noyau est le centre de G. 3 : penser aux groupes commutatifs.