Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2011-2012
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Évaluation des exercices :

[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.
[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 9

[E] **Exercice 1 -** Soit A la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[X]/(P)$, où $P = X^5 - X - 1$, et soit $\omega \in A$ la classe de X. On rappelle que $\mathscr{B} = (1, \omega, \dots, \omega^4)$ est une $\mathbb{Q}$-base de A.

1 - ω est-il inversible dans A ? Si oui, écrire son inverse dans la base $\mathscr{B}$.

2 - Écrire ω^{13} dans la base $\mathscr{B}$.

[S] **Exercice 2 -** Pour tout anneau commutatif k, on notera $D_k := k[T]/(T^2)$ la k-algèbre des « nombres duaux ». La classe de T dans D_k sera notée ε_k, ou simplement ε.

[E] **1** - Pour toute k-algèbre A, décrire les morphismes de k-algèbres de D_k dans A.

2 - Définir un isomorphisme naturel entre $D_k[X]$ et $D_{k[X]}$.

3 - Pour tout $P \in k[X]$, on considère l'élément $P(X + \varepsilon)$ de $D_{k[X]}$. Montrer qu'il s'écrit de façon unique $P(X + \varepsilon) = P + \varepsilon\, \partial(P)$ où $\partial(P)$ est un élément de $k[X]$.

4 - Montrer que l'application $\partial : k[X] \to k[X]$ est k-linéaire et vérifie $\partial(X) = 1$ et $\partial(PQ) = \partial(P)\, Q + P\, \partial(Q)$ $(P, Q \in k[X])$.

5 - En déduire (si ce n'est pas déjà fait) que $\partial(P) = P'$ (le polynôme dérivé de P).

Exercice 3 - Soit A la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[X]/(P)$, où $P = (X - 1)^2(X^2 - 2)^3(X^2 + 3)$.

[E] **1** - Trouver le nombre de morphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres de A dans L lorsque $L = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$ puis $L = \mathbb{C}$.

2 - Même question pour $L = \mathbb{Q}[T]/(T^2)$. (Réponse : ∞).

Exercice 4 - Soit K un corps, et soit $d \in K$ non carré. Soit $(L, \sqrt{d})$ un corps de rupture du polynôme $X^2 - d$. (On rappelle qu'ici $\sqrt{d}$ n'est qu'une notation).

[ES] **1** - Soit $\alpha = x + y\sqrt{d} \in L$ (avec x et y dans K). Calculer la norme, la trace et le polynôme caractéristique χ_α de α sur K (cf. feuille 8, ex. 15).

[S] **2** - On suppose K de caractéristique $\neq 2$. Montrer que L admet un unique K-automorphisme non trivial σ, donné par $x + y\sqrt{d} \mapsto x - y\sqrt{d}$ (notations ci-dessus). Montrer que $\mathrm{N}(\alpha) = \alpha\, \sigma(\alpha)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha + \sigma(\alpha)$, $\chi_\alpha(X) = (X - \alpha)(X - \sigma(\alpha))$. Que se passe-t-il en caractéristique 2 ?

3 - Trouver tous les éléments de L dont le carré est dans K, et tous les éléments de K qui sont des carrés dans L.

[S] **Exercice 5 -** Soit α le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1 - Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ (on pourra par exemple calculer $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$), mais que $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. En déduire le degré $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

2 - Trouver le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$. (On pourra dans un premier temps chercher un polynôme annulateur, puis utiliser la question précédente pour montrer qu'il s'agit bien du polynôme minimal.)

3 - Montrer que le polynôme $X^4 - 10X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 6 - Donner les polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$ des éléments suivants de $\mathbb{C}$ (on pourra appliquer la même méthode qu'à l'exercice précédent) : $\alpha = 7^{1/3} + 2^{1/2}$, $\beta = i + j$, $\gamma = j + \sqrt{3}$, $\delta = j\sqrt{2}$, $\varepsilon = i + \sqrt{2}$. (On note comme d'habitude $j = e^{2i\pi/3}$).

Exercice 7 - Soient K un corps et L une extension finie de degré m de K. Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré d.

1 - On suppose d premier avec m. Soit Q un facteur irréductible de P dans $L[X]$, et soit $L(\alpha)$ un corps de rupture de Q sur L. Calculer $[L(\alpha) : K]$, et en déduire que P est irréductible dans $L[X]$.

2 - Calculer $(X^2 + X\sqrt{2} + 1)(X^2 - X\sqrt{2} + 1)$. Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et réductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mais n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

[S] **Exercice 8 -** Soient K un corps, $m \in \mathbb{N}^*$, et $a \in K$. Soit $L = K(\alpha)$ une extension finie monogène de K, avec $\alpha^m = a$. (Pourquoi une telle extension existe-t-elle toujours ?) On pose $d = [L : K]$.

1 - A priori, que peut-on dire de d par rapport à m ?

2 - En calculant la norme $\mathrm{N}_{L/K}(a)$ (cf feuille 8, exercice 15) de deux manières différentes, montrer qu'il existe $b \in K$ tel que $a^d = b^m$.

3 - On suppose que d et m sont premiers entre eux. Déduire de la question **2** que a est une puissance m-ième dans K.

4 - On suppose que m est premier. Montrer que le polynôme $X^m - a$ est irréductible sur K si et seulement si il n'a pas de racine dans K.

5 - On suppose que $K = \mathbb{Q}$ et que a est un entier sans facteur carré avec $|a| \geq 2$. Montrer que le polynôme $X^m - a$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $m \geq 1$. (On conseille de revenir à la question **2**).

6 - Montrer que $X^4 + 1$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais n'a pas de racine réelle.

[S] **Exercice 9 -** (Équation d'Artin-Schreier) Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. On rappelle que p est premier, et que K admet un unique sous-corps à p éléments, noté $\mathbb{F}_p$, qui est l'image du morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans K.

1 - Rappel : montrer que l'on a dans $\mathbb{F}_p[X]$ l'identité $X^p - X = \prod_{i=0}^{p-1}(X - i) = \prod_{a \in \mathbb{F}_p}(X - a)$.

2 - Montrer que l'application $x \mapsto x^p - x$ de K dans K est un endomorphisme de groupe additif. Quel est son noyau ?

Dans la suite on fixe $a \in K$, et on pose $P = X^p - X - a \in K[X]$. On note (L, α) un corps de rupture de P.

3 - En utilisant la question **2**, trouver les racines de P dans L et montrer que P est scindé dans $L[X]$.

4 - On suppose que P n'a pas de racine dans K. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$. (On pourra considérer la somme des racines d'un facteur irréductible de P). En déduire le degré de L sur K.

5 - Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que le polynôme $X^p - X - n$ soit irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.