Université de Rennes 1 - 2011-2012 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Contrôle du 2/12/2011 - Durée : 1 heure

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif.
Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.

Exercice 1 - (question de cours, 4 points) Donner les définitions : (a) d'un corps algébriquement clos ; (b) d'une clôture algébrique.

Remarques : on rappelle que toutes les notations utilisées doivent être définies. Si plusieurs définitions équivalentes sont possibles, on n'en demande qu'une.

Exercice 2 - (6 points) On rappelle qu'un élément u d'un anneau A est *nilpotent* s'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $u^r = 0$.

Soient k un corps et $n \in \mathbb{N}$ (on pourra supposer $n > 0$). Définir une bijection entre :
(a) l'ensemble des classes de similitude de matrices nilpotentes de $\mathrm{M}_n(k)$;
(b) l'ensemble des suites *croissantes* $(r_1, \ldots, r_m)$ d'entiers strictement positifs vérifiant la condition $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

(Indication : quels sont les invariants de similitude possibles pour une matrice nilpotente ?)

Exercice 3 - (4 points) Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps fini à p éléments et on considère l'anneau $A = \dfrac{\mathbb{F}_p[x]}{(P)}$, où $P \in \mathbb{F}_p[x]$ est un polynôme non nul, de degré n, en l'indéterminée x.

On représente les éléments de A (de façon unique) comme classes de polynômes de degré $< n$ à coefficients dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

A l'aide de maple, écrire (en utilisant, *par exemple*, les fonctions de division euclidienne et de réduction modulo p) trois procédures permettant respectivement d'additionner, de multiplier et d'inverser dans A. Les données d'entrée sont p, P et les éléments à traiter.

Exercice 4 - (-2 à $+6$ points) Soient $K \subset L \subset M$ trois corps, et soit $P \in K[X]$ un polynôme non nul. Pour chaque assertion ci-dessous, on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.

Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.
Ne répondez qu'à coup sûr ! !

1. Si M est algébrique sur K, L est algébrique sur K.
2. Si M est transcendant sur K, M est transcendant sur L.
3. Si M est transcendant sur L, M est transcendant sur K.
4. Si P est irréductible dans $L[X]$, il est irréductible dans $K[X]$.
5. Si P est séparable sur K, il est séparable sur L.
6. Si P est séparable sur L, il est séparable sur K.