Université de Rennes 1 - 2011-2012 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Corrigé du contrôle du 21/10/2010 - Durée : 1 heure

Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.

Exercice 1 - (question de cours, 4 points) Énoncer le « théorème de la base adaptée ».
Remarque : on rappelle que toutes les notations utilisées doivent être définies.

Voir l'énoncé 4.4 du chapitre II du cours. Principales erreurs rencontrées :
- confusion avec le théorème de la base incomplète ;
- omission de l'hypothèse que l'anneau est principal ;
- mettre la base dans les données (ce qui revient à dire, lorsque l'anneau A est un corps, que tout sous-espace vectoriel de A^n est engendré par des éléments de la base canonique...) ;
- oubli de l'assertion d'unicité.

Exercice 2 - (3 points) Soient A un anneau principal, M un A-module, et $u : M \to A$ une application A-linéaire. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u)$ a un supplémentaire dans M. (Indication : considérer l'image de u).

L'image de u est un idéal de A, donc est nulle ou libre de rang 1 comme A-module. Donc le quotient $M/\mathrm{Ker}\,(u)$ est libre, de sorte que $\mathrm{Ker}\,(u)$ a un supplémentaire dans M (cours, chap. I, corollaire 6.5).

Exercice 3 - (6 points) Soit A un anneau intègre et soient a, b, x, e des éléments non nuls de A.
1- On suppose que e est un PGCD de a et b (on pourra écrire $e = \mathrm{PGCD}(a, b)$, avec l'abus d'écriture habituel). Montrer que e est un PGCD de a et $b + ax$.

Notons $\mathrm{Div}(S)$ l'ensemble des diviseurs communs d'une partie S de A. Alors $\mathrm{Div}\{a, b\} = \mathrm{Div}\{a, b + ax\}$: l'inclusion $\subset$ est immédiate, et pour $\supset$ on remarque que $b = (b + ax) - ax$. L'hypothèse sur e signifie que $\mathrm{Div}\{a, b\} = \mathrm{Div}\{e\}$: on a donc aussi $\mathrm{Div}\{a, b + ax\} = \mathrm{Div}\{e\}$, d'où la conclusion.

2- La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Oui : d'après ce qui précède, si $\mathrm{Div}\{a, b + ax\} = \mathrm{Div}\{e\}$, alors $\mathrm{Div}\{a, b\} = \mathrm{Div}\{e\}$.

3- On suppose maintenant que e est un PPCM de a et b. Peut-on en déduire que e est un PPCM de a et $b + ax$? Justifier.

Non. Exemple : $A = \mathbb{Z}$, $a = b = x = 1$.

Exercice 4 - (3 points) Écrire une procédure Maple qui reçoit trois entiers a, b, c et retourne une liste $[u, v, w, d]$ vérifiant $d = \mathrm{pgcd}(a, b, c) = ua + vb + wc$. (Rappel : Maple ne traite directement que le cas de deux entiers).

```
proc(a,b,c)
     local d,u1,v1,u2,v2;
     d := igcdex(igcdex(a,b,'u1','v1'),c,'u2','v2');
     return [u1*u2,v1*u2,v2,d];
end proc;
```

Exercice 5 - (-2 à $+4$ points) Pour chaque assertion ci-dessous (où A désigne un anneau commutatif), on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

Ne répondez qu'à coup sûr ! !

1. Si E et F sont deux A-modules libres, alors $E \times F$ est libre.

Vrai.

2. Si E est un A-module libre et F un sous-module libre de E, alors E/F est libre.

Faux (exemple : $A = E = \mathbb{Z}$, $F = 2\mathbb{Z}$).

3. Si A est principal et si J est un idéal de A, l'anneau quotient A/J est principal.

Faux (A/J n'est pas nécessairement intègre).

4. Si A est principal et si J est un idéal de A, tout idéal de A/J est engendré par un élément.

Vrai (théorème sur les idéaux d'un quotient).