Université de Rennes 1 - 2011-2012 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Contrôle du 21/10/2010 - Durée : 1 heure

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif.
Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.

Exercice 1 - (question de cours, 4 points) Énoncer le « théorème de la base adaptée ».
Remarque : on rappelle que toutes les notations utilisées doivent être définies.

Exercice 2 - (3 points) Soient A un anneau principal, M un A-module, et $u : M \to A$ une application A-linéaire. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u)$ a un supplémentaire dans M. (Indication : considérer l'image de u).

Exercice 3 - (6 points) Soit A un anneau intègre et soient a, b, x, e des éléments non nuls de A.
1- On suppose que e est un PGCD de a et b (on pourra écrire $e = \mathrm{PGCD}(a, b)$, avec l'abus d'écriture habituel). Montrer que e est un PGCD de a et $b + ax$.
2- La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
3- On suppose maintenant que e est un PPCM de a et b. Peut-on en déduire que e est un PPCM de a et $b + ax$? Justifier.

Exercice 4 - (3 points) Écrire une procédure Maple qui reçoit trois entiers a, b, c et retourne une liste $[u, v, w, d]$ vérifiant $d = \mathrm{pgcd}(a, b, c) = ua + vb + wc$. (Rappel : Maple ne traite directement que le cas de deux entiers).

Exercice 5 - (-2 à $+4$ points) Pour chaque assertion ci-dessous (où A désigne un anneau commutatif), on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

Ne répondez qu'à coup sûr ! !

1. Si E et F sont deux A-modules libres, alors $E \times F$ est libre.
2. Si E est un A-module libre et F un sous-module libre de E, alors E/F est libre.
3. Si A est principal et si J est un idéal de A, l'anneau quotient A/J est principal.
4. Si A est principal et si J est un idéal de A, tout idéal de A/J est engendré par un élément.