**Université de Rennes 1 - 2011-2012 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Corrigé du contrôle du 23/09/2010 - Durée : 1 heure**

**Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.**

**Exercice 1 -** (question de cours, 4 points) Donner la définition d'un sous-groupe distingué.

*Remarques :* on rappelle que toutes les notations utilisées doivent être définies. Si la définition du cours comporte plusieurs conditions équivalentes, une seule suffira. Les commentaires sont superflus (et vivement déconseillés).

Soient $G$ un groupe (noté multiplicativement) et $H$ un sous-groupe de $G$. On dit que $H$ est distingué dans $G$ si $H$ est stable par conjugaison, c'est-à-dire :

$$\forall x \in G, \quad \forall h \in H, \qquad xhx^{-1} \in H.$$

**Exercice 2 -** (2 points) Soit $A$ un anneau commutatif, et soit $I$ un idéal de $A$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $I = A$ ; (ii) $I$ contient un élément inversible de $A$.

(i)$\Rightarrow$(ii) : si $I = A$, alors $I$ contient 1, qui est inversible.

(ii)$\Rightarrow$(i) : supposons que $I$ contient $u \in A^\times$ ; soit $x \in A$ quelconque, et montrons que $x \in I$. On a en effet $x = 1x = (uu^{-1})x = u(u^{-1}x)$ qui appartient à $I$ puisque $u \in I$ et que $I$ est un idéal.

**Exercice 3 -** (3 points) Soit $f : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes (notés multiplicativement).
1- Si $G$ est commutatif, est-ce que $H$ est commutatif ? Justifier la réponse.

Oui. Soient $x$ et $y$ dans $H$ : alors il existe $u$ et $v$ dans $G$ tels que $f(u) = x$ et $f(v) = y$. On a $xy = f(u)f(v) = f(uv)$ ($f$ est un morphisme) et de même $yx = f(vu)$. Or $uv = vu$ puisque $G$ est commutatif, donc $xy = yx$, cqfd.

2- Si $H$ est commutatif, est-ce que $G$ est commutatif ? Justifier la réponse.

Non : prendre $G$ non commutatif et $H$ trivial.

**Exercice 4 -** Pour chaque assertion ci-dessous, on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
**Barème :** 1 par réponse correcte, $-1$ par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

**Ne répondez qu'à coup sûr !!**

1. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$.

Faux (théorème de Lagrange, par exemple).

2. $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{R}^\times, \times)$.

Vrai (utiliser l'exponentielle).

3. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ est isomorphe à un sous-anneau de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$.

Faux (le seul sous-anneau de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$).

4. L'application déterminant det : $M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un morphisme d'anneaux.

Faux (elle ne respecte pas l'addition).

5. Si $A$ et $B$ sont deux anneaux, il existe un morphisme d'anneaux de $A$ dans $B$.

Faux (exemple : $A$ nul, $B$ non nul).

6. L'application $\lambda \mapsto \lambda I_2$ de $\mathbb{R}$ dans $M_2(\mathbb{R})$ est un morphisme d'anneaux ($I_2$ = la matrice identité).

Vrai.

7. Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, l'image de $f$ est un sous-anneau de $B$ et le noyau de $f$ est un sous-anneau de $A$.

Faux (pour le noyau).

8. Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes, l'image de $f$ est un sous-groupes distingué de $H$.

Faux.

9. Tout anneau quotient d'un anneau intègre est intègre.

Faux (exemples : le quotient nul, ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).

10. Tout sous-anneau d'un corps est un corps.

Faux (exemple : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

11. Si $G$ et $H$ sont deux groupes, il existe un morphisme de groupes de $G$ dans $H$.

Vrai (le morphisme trivial).