Université de Rennes 1 - 2011-2012 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Contrôle du 23/09-/2010 - Durée : 1 heure

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif.
Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.

Exercice 1 - (question de cours, 4 points) Donner la définition d'un sous-groupe distingué.

Remarques : on rappelle que toutes les notations utilisées doivent être définies. Si la définition du cours comporte plusieurs conditions équivalentes, une seule suffira. Les commentaires sont superflus.

Exercice 2 - (2 points) Soit A un anneau commutatif, et soit I un idéal de A. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $I = A$; (ii) I contient un élément inversible de A.

Exercice 3 - (3 points) Soit $f : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes (notés multiplicativement).
1- Si G est commutatif, est-ce que H est commutatif ? Justifier la réponse.
2- Si H est commutatif, est-ce que G est commutatif ? Justifier la réponse.

Exercice 4 - Pour chaque assertion ci-dessous, on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention. Les notes inférieures à -4 (pour l'exercice) seront ramenées à -4 ; le cas échéant, les notes négatives (pour l'ensemble du contrôle) seront ramenées à 0.

Ne répondez qu'à coup sûr ! !

1. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$.
2. $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{R}^\times, \times)$.
3. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ est isomorphe à un sous-anneau de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$.
4. L'application déterminant det : $M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un morphisme d'anneaux.
5. Si A et B sont deux anneaux, il existe un morphisme d'anneaux de A dans B.
6. L'application $\lambda \mapsto \lambda I_2$ de $\mathbb{R}$ dans $M_2(\mathbb{R})$ est un morphisme d'anneaux ($I_2 =$ la matrice identité).
7. Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, l'image de f est un sous-anneau de B et le noyau de f est un sous-anneau de A.
8. Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes, l'image de f est un sous-groupes distingué de H.
9. Tout anneau quotient d'un anneau intègre est intègre.
10. Tout sous-anneau d'un corps est un corps.
11. Si G et H sont deux groupes, il existe un morphisme de groupes de G dans H.