

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Algorithme de Héron.

1. Montrer qu'il est possible de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.
4. Calculer un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $|u_n - \sqrt{2}| < 30000^{-1}$.

Exercice 2. Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = e^x - 2$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $g(x) = f(x) - x$. Montrer qu'il existe exactement deux réels distincts, disons ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < 0 < \ell_2$, qui sont points fixes de f , c'est à dire vérifient $f(\ell_1) = \ell_1$ et $f(\ell_2) = \ell_2$.
2. Faire un dessin du graphe de f et de la droite d'équation $y = x$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Représenter le cheminement des u_n sous la forme de « marches d'escalier ». Étudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. On sélectionne maintenant $u_0 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. On choisit dans cette question $a = \ell_1$ ou $a = \ell_2$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ces deux cas ?
5. On prend $a \in]-\infty, \ell_1]$ ou $a \in]\ell_2, +\infty[$. Reprendre l'étude précédente (monotonie, dessin, convergence,...) pour chacun de ces deux cas.

Exercice 3. Soient f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = -x^2 + 2x$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracer le graphe de f et la droite d'équation $y = x$. Identifier les ℓ tels que $f(\ell) = \ell$.
2. Soit $u_0 \in]0, 1[$. Dessiner les premières « marches d'escalier » permettant de visualiser les premiers termes de la suite.
3. Montrer que $(u_n - 1) = -(u_{n-1} - 1)^2$ et en déduire le comportement de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Mêmes questions que précédemment avec maintenant $u_0 \notin]0, 1[$.

Exercice 4. Soient f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = (1 - x)^2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

1. Tracer soigneusement sur l'intervalle $[0, 1]$ le graphe de f et de la droite d'équation $y = x$.
2. Calculer les six premiers termes de la suite et visualiser le début d'un « colimaçon ».
3. Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ et que f est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. Que peut-on en déduire pour les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$?
5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
6. On note ℓ_1 la limite de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et ℓ_2 la limite de $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Prouver que ℓ_1 et ℓ_2 sont solutions de l'équation $(f \circ f)(\ell) = \ell$.

Exercice 5. À l'aide de la méthode de Newton, déterminer à 10^{-4} près la plus petite solution strictement positive de l'équation $\tan(x) = x$. (Utiliser une calculatrice pour le calcul de la fonction tangente).