Université de Rennes 1 - 2010-2011 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Examen du 14/12/2010 - Durée : 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif.
Les anneaux sont supposés commutatifs (et unitaires).
Les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1 - (question de cours, 3 points) Soient K un corps, $n \geq 1$ un entier, a un élément non nul de K. À quelle(s) condition(s) sur n, K et a le polynôme $P = X^n - a \in K[X]$ est-il séparable ? Justifier la réponse.

Exercice 2 - (2,5 points) Soient A un anneau, E un A-module, F un sous-module de E, $\pi : E \to E/F$ la surjection canonique. Soient S une partie de E et T une partie de F. On suppose que T engendre F (comme A-module) et que $\pi(S)$ engendre E/F. Montrer que $S \cup T$ engendre E.

Exercice 3 - (2,5 points) Donner un exemple d'un anneau A et d'un sous-A-module de A qui n'est pas libre.

Exercice 4 - (2 points) Soit E le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^{10}$, et soit f l'endomorphisme de E de matrice diag $(J_2(1), J_1(1), J_3(2), J_3(2), J_1(2))$ (où $J_n(\lambda)$ désigne le bloc de Jordan de taille n et de valeur propre λ). Quels sont les facteurs invariants du $\mathbb{Q}[X]$-module E_f ?

Exercice 5 - (2 points) Que fait ce programme Maple ? Quelles sont les conditions sur L pour qu'il fonctionne ? (Ne pas justifier les réponses).

```
f :=proc(L)
local n,d,s,t,g ;
n :=nops(L) ;
if n=2 then
d :=igcdex(L[1],L[2],'s','t') ;
RETURN(d,[s,t]) ;
else
d :=f(L[2..n]) ;
g :=igcdex(L[1],d[1],'s','t') ;
RETURN(g,[s,op(t*d[2])]) ;
fi ;
end ;
```

(T.S.V.P.)

Exercice 6 - (8 points) Soit ζ le nombre complexe $e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$. On pose $K = \mathbb{Q}(\zeta)$.

1- Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et de degré 4 tel que $P(\zeta) = 0$. Quelles sont ses racines dans $\mathbb{C}$? dans K ?

Dans la suite, on admet que P est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$.

2- Montrer que l'extension K est galoisienne sur $\mathbb{Q}$.

On note G le groupe de Galois de K sur $\mathbb{Q}$. On admet qu'il est abélien.

3- Quel est le cardinal de G ? En déduire (en utilisant par exemple un théorème de structure) que $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4- Montrer que K contient au moins deux sous-corps distincts de degré 2 sur $\mathbb{Q}$ (on remarquera que $\sqrt{3} \in K$ et $i \in K$).

5- Que peut-on déduire de la question précédente en termes de sous-groupes de G ?

6- En déduire que $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.