Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques - Année 2010-2011
Master 1 de mathématiques - Algèbre générale de base

Évaluation des exercices :
[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.
[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 4

Par défaut, A désigne un anneau commutatif. Il n'est pas interdit de se demander ce qui se passe sans cette hypothèse !

[ES] **Exercice 1 -** En choisissant A et l'entier n convenablement, donner des exemples :
(i) d'un A-module non libre ;
(ii) d'une partie libre à n éléments de A^n qui n'est pas une base ;
(iii) d'une partie génératrice minimale de A^n qui n'est pas une base.

Exercice 2 - Pour tout entier $n \geq 1$, trouver une partie génératrice minimale du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$, de cardinal n.

[S] **Exercice 3 -** Soit $M := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \equiv 0 \pmod 2 \text{ et } x - y \equiv 0 \pmod 4\}$.
1 - Montrer que M est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2 et en donner une base.
2 - Montrer que $\mathbb{Z}^2/M$ est fini.

[E] **Exercice 4 -** Soient M et N deux A-modules et $f : M \to N$ une application A-linéaire. Soient I un ensemble et $\underline{v} = (v_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I d'éléments de M. On note $f(\underline{v})$ la famille $(f(v_i))_{i\in I} \in N^I$. Vrai ou faux :

(i) $\underline{v}$ libre $\Rightarrow f(\underline{v})$ libre	(ii) $f(\underline{v})$ libre $\Rightarrow \underline{v}$ libre
(iii) $\underline{v}$ génératrice $\Rightarrow f(\underline{v})$ génératrice	(iv) $f(\underline{v})$ génératrice $\Rightarrow \underline{v}$ génératrice.

Et si l'on suppose f injective (resp. surjective) ? Y a-t-il des réciproques, du genre « si l'image d'une famille libre est libre, alors f est surjective » ?

Exercice 5 - Soit M le A-module libre $A^{(\mathbb{N})}$. Décrire $\mathrm{End}_A(M)$ en termes de « matrices » $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ à coefficients dans A.

[S] **Exercice 6 -** Soient M un A-module et N un sous-module de M. On note $\pi : M \to M/N$ la surjection canonique. Soient p et q dans $\mathbb{N}$ et soient $\underline{v} = (v_1, \dots, v_p) \in N^p$, $\underline{w} = (w_1, \dots, w_q) \in M^q$. On note $\underline{v}.\underline{w} \in M^{p+q}$ la concaténation de $\underline{v}$ et $\underline{w}$.
1 - On suppose que $\underline{v}$ est une famille libre de N et que $\pi(\underline{w})$ est une famille libre de M/N. Montrer que $\underline{v}.\underline{w}$ est libre dans M.
2 - Même question en remplaçant partout « libre » par « génératrice ».

[ES] **Exercice 7 -**
1 - Montrer que tout A-module admet une partie génératrice. En déduire que tout A-module est isomorphe à un quotient d'un A-module libre.

2 - Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à un sous-module d'un $\mathbb{Z}$-module libre.

3 - Soit I un idéal de A. Montrer que I est un A-module libre si et seulement si : ou bien $I = \{0\}$, ou bien I est engendré par un élément régulier de A.

4 - Déduire de la question précédente un exemple d'un anneau A et d'un sous-module d'un A-module libre qui n'est pas libre.

5 - Quels sont les anneaux A tels que tout sous-A-module de A soit libre ?

[E] **Exercice 8 -** Soit M un A-module libre non nul et soit $\alpha \in A$. On note α_M la multiplication par α dans M. Montrer que α_M est injective (resp. surjective) si et seulement si α est régulier (resp. inversible) dans A.

Retrouver ainsi le fait que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

Exercice 9 -

[ES] 1 - Montrer que toute somme directe de A-modules libres est libre, et que tout produit *fini* de A-modules libres est libre. (On peut montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas libre).

[S] 2 - Soient M un A-module et N un sous-module de M. Si N et M/N sont libres, montrer que M est libre.

[E] 3 - Soit $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: montrer que $2A$ et $3A$ ne sont pas libres, mais que $2A \oplus 3A$ est libre de rang 1.

Exercice 10 - On suppose A intègre, et on note K son corps des fractions (de sorte que A est un sous-anneau de K, et que tout élément de K est un quotient d'éléments de A).

1 - Soit V un K-espace vectoriel. Montrer qu'une famille $\underline{v} = (v_i)_{i \in I}$ d'éléments de V est libre si et seulement si elle est A-libre (i.e. libre dans V vu comme A-module).

[E] 2 - Avec les notations ci-dessus, montrer que toute famille A-génératrice dans V est K-génératrice, mais que la réciproque est fausse.

3 - Montrer que K est un A-module libre si et seulement si $A = K$.

4 - Soient V et W deux K-espaces vectoriels. Montrer que toute application A-linéaire de V dans W est K-linéaire.

Exercice 11 - Soit M un A-module et soit I un idéal de A. On note IM le sous-module de M engendré par les produits αx, où $\alpha \in I$ et $x \in M$.

[E] 1 - Montrer les propriétés suivantes ; où I et J désignent des idéaux, E et F des sous-modules de M :

$$AM = M; \quad I(JM) = (IJ)M; \quad I(E+F) = IE + IF; \quad (I+J)M = IM + JM.$$

[E] 2 - On munit l'ensemble des idéaux de A de l'addition des idéaux et de la multiplication définie ci-dessus. Est-ce un anneau ?

3 - Montrer que M/IM est de façon naturelle un A/I-module, et que tout A/I-module est de cette forme, en un sens à préciser. Montrer que toute application A-linéaire de M vers un A/I-module se factorise de manière unique par M/IM. (Voir feuille 3, fin de l'exercice 9).

[E] **Exercice 12 -** On suppose A intègre. Un élément x d'un A-module M est dit *de torsion* s'il existe $\alpha \neq 0$ dans A tel que $\alpha x = 0$.

1 - Montrer que l'ensemble M_{tors} des éléments de torsion de M est un sous-module de M. Utilise-t-on le fait que A est intègre ?

On dit que M est un A-module de torsion (resp. sans torsion) si $M_{\text{tors}} = M$ (resp. si $M_{\text{tors}} = \{0\}$).

2 - Montrer que tout A-morphisme $T \to M$, où T est de torsion, se factorise par M_{tors}.

3 - Montrer que M/M_{tors} est sans torsion, et que tout A-morphisme $M \to F$, où F est sans torsion, se factorise par M/M_{tors}. (On précisera ce que cela veut dire).

4 - Un A-module M est *fidèle* si $\operatorname{Ann}_A(M) = \{0\}$. Quelles sont les liens logiques entre les propriétés « fidèle », « de torsion », « sans torsion », et leurs négations ?

5 - Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est-il de torsion ? sans torsion ? fidèle ?

6 - Montrer que tout A-module libre est sans torsion.

7 - Vrai ou faux :

(i) tout sous-module d'un module de torsion est de torsion ;

(ii) tout quotient d'un module de torsion est de torsion ;

(iii) tout sous-module d'un module sans torsion est sans torsion ;

(iv) tout quotient d'un module sans torsion est sans torsion ;

(v) un module sans torsion n'est jamais de torsion ;

(vi) toute somme directe (tout produit, toute somme directe finie, tout produit fini) de modules de torsion est de torsion ;

(vii) toute somme directe (tout produit, etc.) de modules sans torsion est sans torsion.

Exercice 13 - Un A-module M est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie.

[E] 1 - Un A-module M est de type fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que M soit isomorphe à un quotient de A^n.

[E] 2 - Tout quotient d'un A-module de type fini est de type fini.

3 - Soit M un A-module de type fini. Montrer que toute partie génératrice de M contient une partie génératrice finie.

4 - Dans l'anneau $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, montrer que $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est un idéal qui n'est pas de type fini.

[E] 5 - Donner un exemple d'un sous-module d'un module de type fini qui n'est pas de type fini.

6 - Un A-module libre est de type fini si et seulement si il est de rang fini (i.e. isomorphe à A^n pour un $n \in \mathbb{N}$).

7 - Soient M un A-module et N un sous-module de M. Si N et M/N sont de type fini, M est de type fini.

8 - Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module de type fini. (Indication : tout partie finie de $\mathbb{Q}$ a un « dénominateur commun »). En déduire la même propriété pour $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Exercice 14 - On suppose A intègre, et on note K son corps des fractions.

1 - Montrer que si K est un A-module de type fini, alors $A = K$.

2 - Soit M un A-module de type fini. Montrer que M est de torsion si et seulement si M n'est pas fidèle (cf. ex. **12**, question 4).

3 - Soit M un $\mathbb{Z}$-module. Montrer l'équivalence :

$$M \text{ est de torsion et de type fini} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est fini.}$$